

1 Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему линейных уравнений

[illegible]

Решением системы называется такой упорядоченный набор c_1, c_2, \dots, c_n чисел, что при подстановке c_i вместо x_i каждое уравнение системы обращается в тождество.

Расширенной матрицей системы называется матрица

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \dots & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array} \right).$$

Универсальным способом решения систем линейных уравнений является метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных). Материал по данному разделу можно найти в [3], §3, гл. 1; [6], §1, 2.

Элементарные преобразования строк матрицы

1. Перестановка двух строк.
2. Умножение строки на ненулевое число.
3. Прибавление к одной строки другой, умноженной на некоторое число.

Не трудно доказать, что, применяя к расширенной матрице системы элементарные преобразования строк, получим расширенную матрицу эквивалентной системы, т.е. имеющей то же множество решений, что и исходная. Основная идея метода Гаусса: элементарными преобразованиями привести расширенную матрицу системы к ступенчатому виду. Для удобства мы будем записывать все преобразования, которые произведем над матрицей. В круглых скобках будем писать номера строк. Например, обозначение $(2) + 3(4)$ отвечает преобразованию, ко второй

строке прибавляется четвертая, умноженная на три. Обратите внимание, что первым номером идет та строка, которая изменяется. В данном случае изменяется вторая строка, четвертая — без изменений. Перестановку строк обозначим так $(1) \leftrightarrow (5)$. Умножение строки на число — $(3) \cdot 2$.

Заметим, что вычитание строк можно реализовать третьим элементарным преобразованием, для этого достаточно к одной строке прибавить другую, умноженную на -1 . Чтобы разделить строку на ненулевое число k , достаточно умножить эту строку на число k^{-1} . Операции вычитание строк и деление строки на ненулевое число мы будем также использовать. Еще одно преобразование, которое мы будем использовать, это удаление строки, целиком состоящей из нулей. Строка такого вида соответствует уравнению $0 = 0$ и никакой информации о множестве решений системы не несет.

Задача 1. Методом Гаусса решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 17x_4 = 6 \end{cases}.$$

Доказательство. Расширенная матрица нашей системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 17 & 6 \end{array} \right).$$

Приведем матрицу к ступенчатому виду.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 17 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)-2(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -3 \\ 1 & -4 & 1 & 17 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{(3)-(1)} \\ & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 14 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{(3)+2(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Последняя строка матрицы соответствует противоречивому уравнению

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -2,$$

поэтому исходная система не имеет решений.

Ответ. Решений нет.

□

Задача 2. Найти методом Гаусса решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = -2 \end{cases}.$$

Решение. Расширенная матрица нашей системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \end{array} \right).$$

Элементарными преобразованиями строк приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \end{array} \right) &\xrightarrow[\substack{(3)-2\cdot(1) \\ (4)-(1)}]{(3)-2\cdot(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{(3)+3(2) \\ (4)-(2)}]{(3)+3(2)} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) &\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Число ненулевых строк в ступенчатом виде расширенной матрицы равно трем, равно числу переменных. Т.о. все переменные x_1, x_2, x_3 — главные, система имеет единственное решение. Найдем его, для этого получим нули над главной диагональю.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -15 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{(1)-(3) \\ (2)+(3)}]{(1)-(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & -15 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)-2\cdot(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 55 \\ 0 & 1 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & -15 \end{array} \right).$$

Теперь можно сразу выписывать ответ $\begin{cases} x_1 = 55 \\ x_2 = -19 \\ x_3 = -15 \end{cases}$

Выполним проверку, подставим значения переменных в исходную систему.

$$\begin{cases} 55 + 2 \cdot (-19) + (-15) = 2 = 2 \\ -19 - (-15) = -4 = -4 \\ 2 \cdot 55 + (-19) + 6 \cdot (-15) = 1 = 1 \\ 55 + 3 \cdot (-19) = -2 = -2 \end{cases}$$

Все уравнения системы обратились в верные равенства.

Ответ. $(55, -19, -15)$.

□

Задача 3. Найти методом Гаусса общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}.$$

Решение. Расширенная матрица нашей системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array} \right).$$

Элементарными преобразованиями строк приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)-(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)+3(1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{(3)+9(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 22 & 10 & -2 & 20 \end{array} \right) \xrightarrow{(3)-2(2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Переменные x_1 и x_2 , отвечающие первым ненулевым элементам в первой и второй строке, соответственно, являются главными, остальные переменные x_3 и x_4 — свободными. Выразим главные переменные через свободные. Для этого в расширенной матрице получим нули над главной диагональю.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{(2) \div 11} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{10}{11} \end{array} \right) \xrightarrow{(1) - 2(2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{9}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{10}{11} \end{array} \right) \xrightarrow{(1) \div (-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{11} & \frac{9}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{10}{11} \end{array} \right)$$

Перейдем к уравнениям и выпишем ответ.

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{11}x_3 + \frac{9}{11}x_4 = -\frac{2}{11} \\ x_2 + \frac{5}{11}x_3 - \frac{1}{11}x_4 = \frac{10}{11} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4 - \frac{2}{11} \\ x_2 = -\frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 + \frac{10}{11} \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4 - \frac{2}{11} \\ x_2 = -\frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 + \frac{10}{11} \end{cases}$

□

2 Определители

Напомним, что определитель второго и третьего порядка вычисляется по формулам:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Задача 4. Вычислить определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) = 11.$

Ответ. 11.

□

Задача 5. Вычислить определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 5 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 2 + 3 \cdot 7 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) \cdot 5 - 0 \cdot 5 \cdot 5 - 1 \cdot (-1) \cdot 7 - 3 \cdot (-2) \cdot 2 = 15.$$

Ответ. 15.

□

Вычисление определителя по определению вызывает ряд затруднений, связанных, в основном, с большим числом слагаемых в определении. Используя свойства определителя (смотри §3, гл. 3 [3]), можно вычислить его, не прибегая к определению. Одним из таких способов вычисления является приведение матрицы при помощи элементарных преобразований к треугольному виду (угол нулей находится либо ниже, либо выше главной диагонали). Определитель верхне(нижне)-треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали. Напомним, что при элементарных преобразованиях определитель изменится следующим образом.

1. При перестановке местами любых двух строк матрицы определитель меняет знак на противоположный.
2. Если все элементы некоторой строки матрицы умножить на число k , то ее определитель умножится на k .
3. Определитель матрицы не изменится если к одной ее строчке прибавить другую ее строчку, умноженную на любое число.

Задача 6. Приведением к треугольному виду вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Решение. Элементарными преобразованиями строк приведем матрицу к треугольному виду.

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \right| \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (3)-7(1) \\ \hline \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} (2)-4(1) \\ \hline \end{smallmatrix}} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{array} \right| \xrightarrow[\hline]{(3)-2(2)} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов матрицы, стоящих на главной диагонали. В нашем случае $1 \cdot (-3) \cdot 0 = 0$.

Ответ. 0.

□

Задача 7. Приведением к треугольному виду вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\det A = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right| \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (4)-3(1) \\ \hline \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} (2)-(1) \\ (3)-2(1) \\ \hline \end{smallmatrix}} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \end{array} \right| \xrightarrow[\hline]{(2) \leftrightarrow (3)}$$

$$= - \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \end{array} \right| \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (4)+(2) \\ \hline \end{smallmatrix}]{(3)-3(2)} - \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{array} \right| \xrightarrow[\hline]{(4)+\frac{6}{4}(3)} - \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-7}{2} \end{array} \right| =$$

$$= -(1 \cdot 1 \cdot (-4) \cdot \frac{-7}{2}) = -14.$$

Ответ. -14.

□

Еще одним способом вычисления определителя является метод разложения по строке (по столбцу).

Определитель матрицы, получающейся из A вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца, обозначается M_{ij} и называется *минором* матрицы A , соответствующим элементу a_{ij} .

Величина $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} .

Пусть A — матрица размера n на n . Формула разложения по i -той строке

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

Формула разложения по j -тому столбцу

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}.$$

Задача 8. Вычислить минор M_{32} и алгебраическое дополнение A_{32} для матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & 2 & -1 \\ 0 & 11 & -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение. По определению M_{32} есть определитель матрицы, полученной

вычеркиванием 3-ей строки и 2-го столбца из матрицы

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 1 \\ \hline 3 & 10 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 11 & -1 & 9 \end{array} \right).$$

$$\begin{aligned} M_{32} &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 9 \end{vmatrix} \stackrel{(2)+(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & -1 & 9 \end{vmatrix} \stackrel{(2) \leftrightarrow (3)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{(3)+9(2)}{=} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 84 \end{vmatrix} = -(1 \cdot (-1) \cdot 84) = 84. \end{aligned}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -84.$$

Ответ. -84 .

□

Задача 9. Разложив по второй строке, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & b & c \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. В соответствии с общей формулой разложения по i -той строке:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & b & c \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot a \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot b \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \\ + (-1)^{2+3} \cdot c \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -a \cdot (-1 \cdot 1 - 3 \cdot 0) + b \cdot (2 \cdot 1 - 3 \cdot 2) - c \cdot (2 \cdot 0 - (-1) \cdot 2) = \\ = a - 4b - 2c.$$

Ответ. $a - 4b - 2c$.

□

Метод Крамера

Еще одним способом решения систем линейных уравнений является правило Крамера (смотри [3] §3, гл. 3). Рассмотрим систему линейных уравнений, у которой число неизвестных равно числу уравнений. Обозначим через A матрицу коэффициентов при неизвестных. Предположим, что $\det A \neq 0$. Тогда система имеет единственное решение и его можно найти следующим образом: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, ..., $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$, где $\Delta = \det A$, Δ_i — определитель матрицы, полученной из A заменой i -го столбца, столбцом свободных членов.

Задача 10. Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}.$$

Решение. Найдем определитель матрицы коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Определитель не равен нулю, поэтому, решение системы единственно. Найдем $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{10} & 3 & 5 \\ \mathbf{3} & 7 & 4 \\ \mathbf{3} & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{10} & 5 \\ 3 & \mathbf{3} & 4 \\ 1 & \mathbf{3} & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & \mathbf{10} \\ 3 & 7 & \mathbf{3} \\ 1 & 2 & \mathbf{3} \end{vmatrix} = 2.$$

По формуле Крамера имеем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3}{1} = 3, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2}{1} = -2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2}{1} = 2.$$

Ответ. $(3, -2, 2)$.

□

3 Алгебра матриц

Матрица — это прямоугольная таблица чисел. Размером матрицы называется число ее строк и число столбцов.

$$A_{k \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Действия над матрицами

Всякую матрицу можно *умножить на число*, для этого каждый элемент матрицы нужно умножить на это число.

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера $k \times n$ называется матрица $C_{k \times n} = (c_{ij})$, такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Если число столбцов матрицы $A_{k \times n}$ равно числу строк матрицы $B_{s \times t}$ (то есть $n = s$), то определено *умножение* $A \cdot B$. Результат умножения $A \cdot B$ есть матрица $C = (c_{ij})$ размера $k \times t$, для которой

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Одна из особенностей операции умножения состоит в том, что произведение матриц в общем случае некоммукативно, то есть $AB \neq BA$. Приведите пример таких матриц A и B , что $AB \neq BA$. Квадратная матрица

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

размера $n \times n$ играет роль единицы по умножению в матрицах, то есть для любой матрицы $A_{k \times s}$:

$$A \cdot E_s = E_k \cdot A = A.$$

Матрица E называется *единичной матрицей*.

Операция *транспонирование* применима к любой матрице $A_{k \times n}$. Она заключается в том, что столбцы матрицы A становятся строками и наоборот, строки — столбцами. Обозначается операция транспонирования

верхним индексом t , например A^t . Нетрудно заметить, что на месте ij матрицы A^t стоит элемент a_{ji} матрицы A .

Задача 11. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $C =$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ вычислить значения выражений:

1. $A \cdot B$

2. $A^t \cdot B^t + 2C^2$

Решение.

$$\begin{aligned} 1. A \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 5 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 + 8 \cdot 2 & -1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 8 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 27 & 12 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Вычислим значение выражения $A^t \cdot B^t + 2C^2$ по действиям.

$$\begin{aligned} A^t \cdot B^t &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 0 & 10 - 2 & 4 - 1 \\ 1 + 0 & -5 + 4 & -2 + 2 \\ 0 + 0 & 0 + 16 & 0 + 8 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 8 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 16 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 0 + 0 & 0 + 0 - 12 & -3 + 0 + 3 \\ -2 + 2 + 0 & 0 + 1 - 20 & 6 + 5 + 5 \\ 0 - 8 + 0 & 0 - 4 - 4 & 0 - 20 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 0 \\ 0 & -19 & 16 \\ -8 & -8 & -19 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Общее значение выражения:

$$A^t \cdot B^t + 2C^2 = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 16 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 12 & 0 \\ 0 & -19 & 16 \\ -8 & -8 & -19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 1 & -20 & 16 \\ -8 & 8 & -11 \end{pmatrix}.$$

Ответ. 1. $\begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 27 & 12 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 1 & -20 & 16 \\ -8 & 8 & -11 \end{pmatrix}$.

□

Обратная матрица

Матрица A называется *обратимой*, если существует такая матрица B , что $AB = BA = E$. Матрица B называется обратной к матрице A и обозначается A^{-1} .

Критерий обратимости. Матрица A обратима тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$. Более того, обратная матрица может быть вычислена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^t,$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение.

Задача 12. С помощью алгебраических дополнений найти обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для вычисления обратной матрицы нам необходимо найти определитель $\det A$ и алгебраические дополнения $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{44}$.

Определитель $\det A$ найдем разложением по первой строке:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-2+6) = -4.$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -16.$$

$$\begin{aligned}
A_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -4. \\
A_{13} &= (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -32. \\
A_{14} &= (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12. \\
A_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0. \\
A_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0. \\
A_{23} &= (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3. \\
A_{24} &= (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1. \\
A_{31} &= (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 4. \\
A_{32} &= (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0. \\
A_{33} &= (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 9. \\
A_{34} &= (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3. \\
A_{41} &= (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

$$A_{44} = (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Теперь мы готовы выписывать обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & \frac{3}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{1}{2} \\ 3 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ответ. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & \frac{3}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{1}{2} \\ 3 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

□

Альтернативный способ нахождения обратной матрицы — метод Жордана–Гаусса. Справа, через вертикальную черту, от данной матрицы A припишем единичную матрицу такого же размера. Действуя всей матрицей целиком, элементарными преобразованиями строк получим на месте матрицы A единичную матрицу. Тогда приписанная справа единичная матрица преобразуется в матрицу A^{-1} .

$$(A|E) \longrightarrow (E|A^{-1})$$

Задача 13. *С помощью элементарных преобразований найти обратную к матрице*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Припишем к матрице A единичную матрицу.

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

С помощью элементарных преобразований строк матрицу $(A|E)$ приведем к виду, когда на месте матрицы A стоит единичная.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(2)-(1) \\ (3)-4(1) \\ (4)-3(1)}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 3 & -2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 17 & 4 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{2(2)-(4)} \\ & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 25 & 3 & -2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 17 & 4 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(3)-25(2) \\ (4)-17(2)}} \\ & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -29 & -50 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -20 & -34 & 0 & 18 \end{array} \right) \xrightarrow{(3)-(4)} \\ & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -9 & -16 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -20 & -34 & 0 & 18 \end{array} \right) \xrightarrow{(4)+4(3)} \\ & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -9 & -16 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -56 & -98 & 4 & 46 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(3)\div(-1) \\ (4)\div(-2)}} \\ & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 16 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 28 & 49 & -2 & -23 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)-(4)} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & -1 & 0 & | & -27 & -49 & 2 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 9 & 16 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 28 & 49 & -2 & -23 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & | & -18 & -33 & 1 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 9 & 16 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 28 & 49 & -2 & -23 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+6(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -12 & -21 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 9 & 16 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 28 & 49 & -2 & -23 \end{pmatrix}$$

Ответ. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -12 & -21 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 9 & 16 & -1 & -7 \\ 28 & 49 & -2 & -23 \end{pmatrix}.$

□

Задача 14. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \\ -6 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Дано уравнение вида $A \cdot X = B$. Отметим, что грубейшей ошибкой было бы предложить для нахождения неизвестной матрица X поделить матрицу B на матрицу A . Операции деления матриц не существует. Поэтому для нахождения матрицы X необходимо обе части уравнения умножить на A^{-1} слева. Заметим, что важно то, с какой стороны умножать матрицы, так как умножение матриц не коммутативно. Получим

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

откуда сразу же следует, что

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Отметим, что данный метод решение возможен, лишь в случае, когда $\det A \neq 0$. В противном случае обратной матрицы A^{-1} не существует, и данный метод не применим. В нашем случае

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-2) \cdot 1 + 2 \cdot (-3) \cdot (-1) -$$

$$-(-1) \cdot 1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \cdot (-2) = -2 + 4 + 6 - 2 + 3 - 8 = 1.$$

Найдем A^{-1} методом Жордана-Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{2(1)+(2) \\ (1)+(3)}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-2(3)+(2)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{2(2)+(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{(3)+(2)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{-1 \cdot (2) \\ -1 \cdot (3)}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 5 \end{array} \right)$$

Таким образом $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 7 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. Тогда

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 7 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \\ -6 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 & 4 \\ -26 & -30 & -8 \\ 17 & -21 & -7 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $X = \begin{pmatrix} 14 & 16 & 4 \\ -26 & -30 & -8 \\ 17 & -21 & -7 \end{pmatrix}.$

□

4 Комплексные числа

Арифметические операции

Комплексным числом называется выражение вида $a + bi$, где a и b — вещественные числа, элемент i удовлетворяет условию $i^2 = -1$. Заметим, что элемент i не принадлежит \mathbb{R} . i называется *мнимой единицей*.

На множестве комплексных чисел введены две операции сложение и умножение. Пусть даны два комплексных числа $z = a + bi$, $w = c + di$. Тогда

- $z + w = (a + c) + (b + d)i$;
- $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Относительно введенных операций множество комплексных чисел образует поле [3, §1, гл. 5], которое мы будем обозначать через \mathbb{C} .

Пусть дано комплексное число $z = a + bi$. Комплексно сопряженным к числу z называется число $a - bi$ и обозначается через \bar{z} . Для того, чтобы вычислить выражение $\frac{w}{z}$ с комплексными числами w и z , нужно и числитель, и знаменатель умножить на комплексно сопряженное к знаменателю, в данном случае на \bar{z} .

Задача 15. Найти значение выражения

$$(2 + i)(1 - i) + \frac{6 - 7i}{2 - 3i}.$$

Решение. Выполним по действиям.

$$1. (2 + i)(1 - i) = 2 - 2i + i - i^2 = 3 - i.$$

$$2. \frac{6 - 7i}{2 - 3i} = \frac{(6 - 7i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{12 + 18i - 14i - 21i^2}{2^2 - (3i)^2} = \frac{12 + 4i + 21}{4 - (-9)} = \frac{33 + 4i}{13}$$

$$3. 3 - i + \frac{33 + 4i}{13} = \frac{13(3 - i) + (33 + 4i)}{13} = \frac{39 - 13i + 33 + 4i}{13} = \frac{72 - 9i}{13} = \frac{72}{13} - \frac{9}{13}i.$$

Ответ. $\frac{72}{13} - \frac{9}{13}i$.

□

Тригонометрическая форма

Любое комплексное число $z = a + bi$ можно представить в виде $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где $-\pi \leq \varphi \leq \pi$. Такая запись называется *тригонометрической формой* комплексного числа z . Правила, по которым вычисляются r и φ довольно просты, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, φ находится из двух условий $\cos \varphi = \frac{a}{r}$, $\sin \varphi = \frac{b}{r}$. Число r называется *модулем* комплексного числа z и обозначается через $|z|$. Число φ называется *аргументом* числа z и обозначается через $\arg z$. Тригонометрическая форма удобна при перемножении и возведении в степень комплексного числа.

Задача 16. Найти тригонометрическую форму числа

$$1 - \sqrt{3}i.$$

Решение. Тригонометрическая форма имеет вид $|z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Здесь $|z|$ — модуль комплексного числа, φ — его аргумент.

В нашем случае

$$1 - \sqrt{3}i$$

$$a = 1$$

$$b = -\sqrt{3}$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Аргумент φ таков, что

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{2} \\ \sin \varphi = \frac{b}{|z|} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Угол, у которого косинус и синус принимают указанные значения — это угол $-\frac{\pi}{3}$. Таким образом тригонометрическая форма числа $1 - \sqrt{3}i$ имеет вид

$$2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right).$$

Ответ. $2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right).$

□

Формула Муавра

Пусть дано комплексное число $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Тогда для любого целого числа n справедлива формула

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Задача 17. Вычислить

$$\left(\frac{2+2i}{\sqrt{3}+i} \right)^{120}.$$

Решение. Заметим, что $\left(\frac{2+2i}{\sqrt{3}+i} \right)^{120} = \frac{(2+2i)^{120}}{(\sqrt{3}+i)^{120}}$.

Вычислим по формуле Муавра значения выражений $(2+2i)^{120}$ и $(\sqrt{3}+i)^{120}$. Для этого найдем тригонометрические формы каждого из оснований.

1. $2+2i$

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Таким образом } 2+2i = 2\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}).$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда по формуле Муавра } (2+2i)^{120} &= (2\sqrt{2})^{120}(\cos \frac{120\pi}{4} + i \sin \frac{120\pi}{4}) \\ &= 2^{180}(\cos 30\pi + i \sin 30\pi) = 2^{180}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2. Аналогично } (\sqrt{3}+i)^{120} &= 2^{120}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})^{120} = 2^{120}(\cos \frac{120\pi}{6} + \\ &+ i \sin \frac{120\pi}{6}) = 2^{120}(\cos 20\pi + i \sin 20\pi) = 2^{120}. \end{aligned}$$

$$\text{Таким образом } \left(\frac{2+2i}{\sqrt{3}+i} \right)^{120} = \frac{2^{180}}{2^{120}} = 2^{60}.$$

Ответ. 2^{60} .

□

Извлечение корней

Пусть дано комплексное число $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Тогда для любого натурального числа n все корни $\sqrt[n]{z}$ есть элементы множества

$$\left\{ |z|^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}.$$

Задача 18. Записать в алгебраической форме элементы множества

$$\sqrt[4]{-16}.$$

Решение. Для того, чтобы воспользоваться формулой для нахождения корней из комплексного числа, нужно подкоренное выражение записать в тригонометрической форме.

$$-16 = 16(\cos \pi + i \sin \pi).$$

Тогда

$$\sqrt[4]{-16} = \left\{ 16^{\frac{1}{4}} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4} \right); k = 0, 1, 2, 3 \right\}$$

$$\text{При } k = 0, z_0 = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

$$\text{При } k = 1, z_1 = 2\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

$$\text{При } k = 2, z_2 = 2\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

$$\text{При } k = 3, z_3 = 2\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

Ответ. $\sqrt[4]{-16} = \{\pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}\}.$

□

Задача 19. Изобразить на комплексной плоскости множество комплексных чисел, удовлетворяющих условию

$$1 < |z - 1 + i| < 2.$$

Решение. Пусть $z = x + i \cdot y \in \mathbb{C}$, тогда $|z - 1 + i| = |(x - 1) + i \cdot (y + 1)| = \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2}$. Двойное неравенство $1 < |z - 1 + i| < 2$ эквивалентно системе:

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 1)^2 < 4 \\ (x - 1)^2 + (y + 1)^2 > 1 \end{cases}.$$

Первое неравенство системы задает внутренность круга с центром в точке $(1, -1)$ и радиусом 2, второе неравенство задает внешность, ограничиваемую окружностью с тем же центром, но радиуса 1. На комплексной плоскости множество точек выглядит как кольцо с центром в точке $(1, -1)$ с наименьшим радиусом 1, и наибольшим 2.

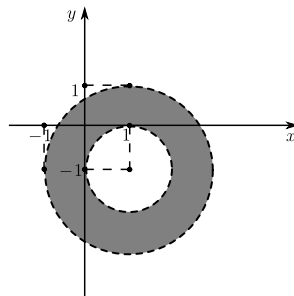


Рис. 1: Множество точек, удовлетворяющих неравенству $1 < |z - 1 + i| < 2$

□

Задача 20. Найти комплексные корни уравнения

$$x^2 - 2x + 2 = 0.$$

Решение. Решение квадратного уравнения над полем комплексных чисел \mathbb{C} ничем не отличается от решения над множеством действительных чисел \mathbb{R} . Дискриминант данного квадратного уравнения

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 = -4 = 4 \cdot i^2 = (2i)^2.$$

Корни уравнения

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

Ответ. $x_{1,2} = 1 \pm i$.

□

5 Алгебра многочленов

Пусть K — коммутативное кольцо с единицей. *Многочленом* над кольцом K от переменной x называется выражение вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$, где коэффициенты $a_i \in K$ почти все равны нулю, за исключением конечного их числа. На множестве всех многочленов от переменной x над кольцом K вводятся операции сложения и умножения.

$$(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots) + (b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + \dots) = \\ (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n + \dots$$

$$(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots)(b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + \dots) = \\ a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + \left(\sum_{i+j=n} a_ib_j\right)x^n + \dots$$

Относительно введенных операций множество многочленов образует коммутативное кольцо с единицей, обозначаемое через $K[x]$ (см. гл. 5 §2 [3]).

Будем говорить, что многочлен $f(x) \in K[x]$ *делит* многочлен $g(x) \in K[x]$ с остатком, если найдутся такие многочлены $q(x)$ и $r(x)$, что выполнено равенство

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

где степень многочлена $r(x)$ строго меньше степени многочлена $g(x)$ или $r(x) = 0$. Многочлен $r(x)$ называется *остатком* от деления многочлена $f(x)$ на $g(x)$ (см. гл. 5 §3 [3]). Далее в качестве кольца K будут рассматриваться \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} или \mathbb{C} .

Задача 21. Пусть $f(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 19$, $g(x) = x^2 - 3x - 3$. Разделить $f(x)$ на $g(x)$ с остатком.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 19 & x^2 - 3x - 3 \\ x^4 - 3x^3 - 3x^2 & \\ \hline -2x^3 + 11x^2 & \\ -2x^3 + 6x^2 + 6x & \\ \hline 5x^2 - 13x & \\ 5x^2 - 15x - 15 & \\ \hline 2x - 4 & \end{array}$$

Ответ. $f(x) = g(x) \cdot (x^2 - 2x + 5) + (2x - 4)$.

□

Задача 22. Найти НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$ и его линейное разложение, если

$$f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1, \quad g(x) = x^3 + x^2 - x - 1.$$

Решение. Наибольший общий делитель двух многочленов найдем с помощью алгоритма Евклида.

Первый шаг: разделим многочлен $f(x)$ на $g(x)$ с остатком.

$$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1 & x^3 + x^2 - x - 1 \\ x^4 + x^3 - x^2 - x & x \\ \hline & -2x^2 - 3x - 1 \end{array}$$

Остаток $r_1(x) = -2x^2 - 3x - 1$, при этом $f(x) = x \cdot g(x) + r_1(x)$.

Второй шаг: поделим с остатком $g(x)$ на $r_1(x)$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 - x - 1 & -2x^2 - 3x - 1 \\ x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x & -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \\ \hline & -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \\ & -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \\ \hline & -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \end{array}$$

Остаток $r_2(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$, при этом $g(x) = r_1(x) \cdot (-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) + r_2(x)$.

Третий шаг: поделим с остатком $r_1(x)$ на $r_2(x)$.

$$\begin{array}{r|l} -2x^2 - 3x - 1 & -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \\ -2x^2 - 2x & \frac{8}{3}x + \frac{4}{3} \\ \hline & -x - 1 \\ & -x - 1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Остаток $r_3(x) = 0$.

По алгоритму Евклида $\text{НОД}(f(x), g(x))$ равен последнему ненулевому остатку. В нашем случае $\text{НОД}(f(x), g(x)) = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$. Заметим, что так как НОД определен с точностью до умножения на ненулевую константу, то можно считать, что $\text{НОД}(f(x), g(x)) = x + 1$.

Теперь найдем линейное представление НОД($f(x), g(x)$) через многочлены $f(x)$ и $g(x)$, то есть представим НОД($f(x), g(x)$) в виде $f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ — многочлены. Для нахождения многочленов $u(x)$ и $v(x)$ надо в обратном порядке выражать остатки через делимое, делитель и частное. Из равенства, соответствующего второму делению:

$$\text{НОД}(f(x), g(x)) = x + 1 = -\frac{4}{3} \cdot \left(g(x) - r_1(x) \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) \right).$$

Из равенства, соответствующего первому делению:

$$r_1(x) = f(x) - x \cdot g(x).$$

Подставляя в предыдущее равенство выражение многочлена $r_1(x)$ через $f(x)$ и $g(x)$, получим:

$$\text{НОД}(f(x), g(x)) = x + 1 = -\frac{4}{3} \cdot \left(g(x) + (f(x) - x \cdot g(x)) \cdot \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) \right).$$

Раскрыв скобки и приведя подобные получим, что

$$\text{НОД}(f(x), g(x)) = f(x) \cdot \left(-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \right) + g(x) \cdot \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} \right).$$

Таким образом, в линейном разложении НОД через многочлены $f(x)$ и $g(x)$:

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \\ v(x) &= \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Ответ. $\text{НОД}(f(x), g(x)) = x + 1 = f(x) \cdot \left(-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \right) + g(x) \cdot \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} \right).$

□

Схема Горнера (смотри гл. 6 § 1 [3]) позволяет довольно быстро разделить многочлен на многочлен вида $x - c$, т.е. на многочлен первой степени. Пусть дан многочлен $f(x) = a_n + a_{n-1}x + \dots + a_0x^n$ степени n . Существует многочлен $q(x) = b_{n-1} + b_{n-2}x + \dots + b_0x^{n-1}$ такой, что $f(x) = (x - c)q(x) + f(c)$. Коэффициенты b_i можно найти по формулам

$$b_0 = a_0; \dots; b_k = b_{k-1}c + a_k; \dots; f(c) = b_{n-1}c + a_n.$$

Вычисление формул схемы Горнера удобнее проводить в табличной записе.

	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-1}	a_n
c	$b_0 = a_0$	b_1	b_2	\dots	b_{n-1}	$f(c)$

Задача 23. Разложить многочлен $f(x) = 2x^5 - x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x - 1$ по степеням $(x - 1)$.

Решение. Разделим $f(x)$ на $(x - 1)$ с остатком. Используем схему Горнера.

	2	-1	3	2	-1	-1
1	2	1	4	6	5	4

Так как мы делим на многочлен первой степени, то остатком будет число, равное последнему числу во второй строке таблицы. Из наших вычислений следует, что

$$f(x) = (2x^4 + x^3 + 4x^2 + 6x + 5)(x - 1) + 4.$$

Далее, рассмотрим частное от этого деления: $f_1(x) = 2x^4 + x^3 + 4x^2 + 6x + 5$. Разделим его на $(x - 1)$ по схеме Горнера:

	2	1	4	6	5
1	2	3	7	13	18

Получаем,

$$f_1(x) = (2x^3 + 3x^2 + 7x + 13)(x - 1) + 18.$$

Подставим $f_1(x)$ в полученное ранее выражение для $f(x)$. Получится

$$\begin{aligned} f(x) &= ((2x^3 + 3x^2 + 7x + 13)(x - 1) + 18)(x - 1) + 4 = \\ &= (2x^3 + 3x^2 + 7x + 13)(x - 1)^2 + 18(x - 1) + 4. \end{aligned}$$

Разделим многочлен $f_2(x) = 2x^3 + 3x^2 + 7x + 13$ на $(x - 1)$ по схеме Горнера:

	2	3	7	13
1	2	5	12	25

Получаем,

$$f_2(x) = (2x^2 + 5x + 12)(x - 1) + 25.$$

Подставим $f_2(x)$ в выражение для $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= ((2x^2 + 5x + 12)(x - 1) + 25)(x - 1)^2 + 18(x - 1) + 4 = \\ &= (2x^2 + 5x + 12)(x - 1)^3 + 25(x - 1)^2 + 18(x - 1) + 4. \end{aligned}$$

Разделим многочлен $f_3(x) = 2x^2 + 5x + 12$ на $(x - 1)$:

	2	5	12
1	2	7	19

Получаем,

$$f_3(x) = (2x + 7)(x - 1) + 19.$$

Подставим $f_3(x)$ в выражение для $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= ((2x + 7)(x - 1) + 19)(x - 1)^3 + 25(x - 1)^2 + 18(x - 1) + 4 = \\ &= (2x + 7)(x - 1)^4 + 19(x - 1)^3 + 25(x - 1)^2 + 18(x - 1) + 4. \end{aligned}$$

Наконец, осталось разделить $(2x + 7)$ на $(x - 1)$:

	2	7
1	2	9

Получаем,

$$2x + 7 = 2(x - 1) + 9.$$

Подставим в выражение для $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2(x - 1) + 9)(x - 1)^4 + 19(x - 1)^3 + 25(x - 1)^2 + 18(x - 1) + 4 = \\ &= 2(x - 1)^5 + 9(x - 1)^4 + 19(x - 1)^3 + 25(x - 1)^2 + 18(x - 1) + 4. \end{aligned}$$

Ответ. $f(x) = 2(x - 1)^5 + 9(x - 1)^4 + 19(x - 1)^3 + 25(x - 1)^2 + 18(x - 1) + 4.$

□

Многочлен f ненулевой степени из $K[x]$ называется *неприводимым* в $K[x]$, если он не делится ни на какой многочлен $g \in K[x]$, у которого $0 < \deg g < \deg f$ (смотри гл. 5 § 4 [3]). В частности, всякий многочлен первой степени неприводим. Основная теорема арифметики многочленов говорит о том, что любой многочлен можно представить в произведение неприводимых многочленов. Однако задача разложения является довольно сложной. В частном случае, если многочлен имеет целые коэффициенты, то все рациональные корни данного многочлена лежат в множестве $\{\frac{p}{q}, \text{ где } p \text{ — делитель свободного члена, } q \text{ — делитель старшего члена}\}$.

Задача 24. Разложить на неприводимые множители над полем \mathbb{R} многочлен

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x - 6.$$

Решение. Так как многочлен $f(x)$ нечетной степени, то он имеет хотя бы один действительный корень. Все рациональные (но не действительные!) корни многочлена со старшим коэффициентом 1 находятся среди делителей свободного члена. Непосредственная подстановка чисел $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ показывает, что $x = 3$ является корнем многочлена $f(x)$, так как $f(3) = 0$. Представим $f(x) = (x - 3) \cdot f_1(x)$, и найдем многочлен $f_1(x)$ с помощью схемы Горнера.

	1	-2	-1	-6
3	1	1	2	0

Таким образом $f(x) = (x - 3)(x^2 + x + 2)$. Многочлен $f_1(x) = x^2 + x + 2$ не имеет действительных корней, так как его дискриминант $D = -7 < 0$, а следовательно он неприводим.

Ответ. $f(x) = (x - 3) \cdot (x^2 + x + 2)$.

□

Задача 25. Представить в виде суммы простейших над полем \mathbb{R} рациональную дробь

$$\frac{6x + 4}{(x + 1)^2(x^2 + 1)}.$$

Решение. Разложение рациональной дроби в виде суммы простейших будем искать с помощью метода неопределенных коэффициентов. Представим данную дробь в виде следующей суммы с неопределенными коэффициентами A, B, C и D :

$$\frac{6x + 4}{(x + 1)^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

Приведем к общему знаменателю, раскроем скобки, приведем подобные и приравняем числители:

$$6x + 4 = x^3(A + C) + x^2(A + B + 2C + D) + x(A + C + 2D) + A + B + D.$$

Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях, поэтому последнее равенство эквивалентно системе:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A + B + 2C + D = 0 \\ A + C + 2D = 6 \\ A + B + D = 4 \end{cases}.$$

Решим систему методом Гаусса

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Таким образом решение системы

$$\begin{cases} A = 2 \\ B = -2 \\ C = -2 \\ D = 3 \end{cases},$$

и тогда исходная рациональная дробь раскладывается в сумму простейших следующим образом:

$$\frac{6x+4}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{2}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{2x-3}{x^2+1}.$$

Ответ. $\frac{6x+4}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{2}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{2x-3}{x^2+1}.$

□

Список литературы

- [1] Воеводин, В. В. Линейная алгебра / В. В. Воеводин. — М.: Наука, 1980. — 400 с.
- [2] Линейная зависимость: методическое указание для практических занятий по курсу «Алгебра и теория чисел» / Р. Ж. Алеев, О. В. Горбачева, В. В. Кораблева. — Челябинск: Челябинский государственный университет, 1989.
- [3] Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры: учебник для вузов / А. И. Кострикин. — 3-е изд., испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [4] Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра: учебник для вузов / А. И. Кострикин. — 3-е изд., испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [5] Кострикин, А. И. Линейная алгебра и геометрия / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. — М.: Наука, 1986.
- [6] Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М.: Наука, 1971.
- [7] Сборник задач по алгебре / Под. ред. А. И. Кострикина: Учебник для вузов. — Изд. 3-е, испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 464 с.
- [8] Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Под. ред. Ю.М. Смирнова. — М.: Логос, 2005.

- [9] Перова, Е. Л. Лекции по линейной алгебре для экономистов: перестановки и матрицы / Е. Л. Перова. — www.csu.ac.ru/lectures/LinAlgEcon.pdf.
- [10] Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. — М.: Наука, 1974.