

## Вопросы к экзамену II семестр

1. Определение векторного пространства. Простейшие свойства векторных пространств.
2. Определение подпространства, основные свойства подпространства.
3. Определение линейной зависимости и линейной независимости векторов, свойства линейно зависимых и независимых векторов.
4. Критерий линейной зависимости.
5. Теорема об очистке линейно полного множества, определение базиса.
6. Теорема о выборе базиса.
7. Теорема о дополнении до базиса.
8. Критерий базиса.
9. Определение координат вектора в базисе, свойства координат вектора.
10. Размерность пространства, теорема о размерности, следствия из нее.
11. Матрица перехода, свойства матрицы перехода.
12. Теорема о монотонности размерности подпространств.
13. Теорема о пересечении подпространств.
14. Линейная оболочка, теорема о линейной оболочке.
15. Сумма подпространств, теорема о сумме подпространств.
16. Теорема о размерности суммы подпространств.
17. Прямая сумма подпространств, теорема о прямой сумме подпространств.
18. Дополнение к подпространству, теорема о существовании дополнения к подпространству.
19. Прямая сумма пространств, теорема о прямой сумме пространств.
20. Три понятия ранга матрицы, доказать, что строчный ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях строк.
21. Доказать, что столбцовый ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях столбцов.
22. Доказать, что строчный ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях столбцов.
23. Доказать, что столбцовый ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях строк.
24. Доказать, что столбцовый ранг матрицы равен строчному рангу матрицы.
25. Доказать, что при элементарных преобразованиях строк минорный ранг матрицы не меняется.
26. Теорема Кронекера-Капелли.
27. Теорема об описании структуры решений системы линейных уравнений.
28. Теорема о размерности пространства решений системы линейных однородных уравнений.
29. Определение линейного оператора, теорема о свойствах линейных операторов.

30. Операции над линейными операторами, теорема о свойствах операций над линейными операторами.
31. Теорема о задании линейного оператора на базисе и матрицей.
32. Теорема о свойствах матриц линейных операторов.
33. Линейные функционалы.
34. Линейные преобразования пространства.
35. Матрицы линейных преобразований в разных базисах.
36. Определение определителя матрицы линейного преобразования, доказать, что определитель линейного преобразования определен корректно.
37. Инвариантные подпространства, свойства инвариантных подпространств.
38. Характеристический многочлен линейного преобразования, теорема о характеристическом многочлене.
39. Теорема Гамильтона-Кэли.
40. Собственные векторы и собственные значения, теорема о нахождении собственных значений.
41. Теорема об одномерных инвариантных подпространствах.
42. Доказать, что собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям линейно независимы.
43. Пространства со скалярным произведением, простейшие свойства таких пространств.
44. Теорема Коши-Буняковского-Шварца.
45. Свойства нормы вектора.
46. Ортогональность векторов и подпространств, теорема об ортогональных множествах векторов, процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
47. Ортогональное дополнение, теорема об ортогональном дополнении.
48. Теорема о связи между ортонормированными базисами в пространстве со скалярным произведением.
49. Линейные функционалы, теорема о линейном функционале на пространстве со скалярным произведением.
50. Сопряженное преобразование, теорема существования сопряженного преобразования.
51. Теорема о свойствах сопряженных преобразований.
52. Теорема о матрице сопряженного преобразования.
53. Нормальные преобразования, теорема о собственных векторах и собственных значениях нормального преобразования.
54. Критерий сохранения скалярного произведения линейным преобразованием.
55. Два понятия квадратичной формы (как функции и как многочлена), связь между ними.
56. Теорема о матрице квадратичной формы.
57. Теорема Лагранжа о приведении квадратичной формы к каноническому виду.
58. Теорема о приведении квадратичной формы к диагональному виду с помощью перехода к ортонормированному базису.

- 59. Закон инерции квадратичных форм.
- 60. Линейная классификация квадратичных форм.
- 61. Критерий положительной определенности квадратичных форм.
- 62. Критерий Сильвестра.