

# Решения задач по алгебре за второй семестр

Д.В. Горковец, Ф.Г. Кораблев, В.В. Кораблева

## 1 Линейные векторные пространства

**Задача 1.** *Линейно зависимы ли векторы в  $\mathbb{R}^4$ ?*

$$a_1 = (4, -5, 2, 6), a_2 = (2, -2, 1, 3), a_3 = (6, -3, 3, 9), a_4 = (4, -1, 5, 6).$$

*Решение.* Составим линейную комбинацию векторов  $a_1, a_2, a_3, a_4$ :

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4.$$

Чтобы выяснить, являются ли векторы  $a_1, a_2, a_3, a_4$  линейно зависимыми или нет, достаточно определить, сколько решений имеет уравнение

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 = 0,$$

где в качестве неизвестных выступают коэффициенты  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ . Если это уравнение имеет единственное решение (нулевое решение есть всегда), то векторы линейно независимы. Если у уравнения есть ненулевое решение, то векторы линейно зависимы. Подставим числовые значения векторов  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , получим:

$$\alpha_1(4, -5, 2, 6) + \alpha_2(2, -2, 1, 3) + \alpha_3(6, -3, 3, 9) + \alpha_4(4, -1, 5, 6) = (0, 0, 0, 0).$$

Умножим каждый из векторов на свой коэффициент и сложим все векторы в левой части равенства, получим:

$$\begin{aligned} (4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3 + 4\alpha_4, -5\alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3 - \alpha_4, 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 5\alpha_4, \\ 6\alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3 + 6\alpha_4) = (0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Два вектора равны, если равны их соответствующие компоненты. Следовательно полученное равенство векторов равносильно системе:

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3 + 4\alpha_4 = 0 \\ -5\alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 5\alpha_4 = 0 \\ 6\alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3 + 6\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Найдем число решений этой системы, используя метод Гаусса. Матрица коэффициентов имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 \\ -5 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что столбцы матрицы коэффициентов — это в точности данные четыре вектора. Мы не пишем столбец со свободными членами, так как все они равны нулю и при элементарных преобразованиях строк не меняются. Приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 \\ -5 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1) - 2(3) \\ (2) + 2(3) \\ (4) - 3(3)}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-1(2) \\ (1) \leftrightarrow (2) \\ (2) \leftrightarrow (3)}} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -9 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2) - 2(1) \\ (4) + 9(3)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 9 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 9 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Полученная матрица состоит из трех строк и четырех столбцов. Исходная система линейных уравнений имеет ненулевое решение. Следовательно данные векторы  $a_1, a_2, a_3, a_4$  линейно зависимы.

**Ответ.** Векторы  $a_1, a_2, a_3, a_4$  линейно зависимы.

□

**Задача 2.** Выделить максимальную линейно независимую подсистему векторов в  $\mathbb{R}^4$ :

$$a_1 = (1, -1, 2, 0), a_2 = (2, 3, -4, 2), a_3 = (3, 2, -2, 2), a_4 = (1, 4, -6, 2), a_5 = (4, 1, 0, 2).$$

*Решение.* Определим, является ли система векторов  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  линейно зависимой или нет. Для этого составим линейную комбинацию:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 + \alpha_5 a_5.$$

Подставим числовые значения векторов  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  и приравняем линейную комбинацию к нулевому вектору в  $\mathbb{R}^4$ , получим:

$$\alpha_1(1, -1, 2, 0) + \alpha_2(2, 3, -4, 2) + \alpha_3(3, 2, -2, 2) + \alpha_4(1, 4, -6, 2) + \alpha_5(4, 1, 0, 2) = (0, 0, 0, 0).$$

В левой части равенства каждый из векторов умножим на соответствующий коэффициент и сложим векторы, получим:

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 + 4\alpha_5, -\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + 4\alpha_4 + \alpha_5, 2\alpha_1 - 4\alpha_2 - 2\alpha_3 - 6\alpha_4, 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5) = (0, 0, 0, 0).$$

Два вектора равны, если равны их соответствующие компоненты, поэтому полученное равенство эквивалентно системе:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 + 4\alpha_5 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + 4\alpha_4 + \alpha_5 = 0 \\ 2\alpha_1 - 4\alpha_2 - 2\alpha_3 - 6\alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 = 0 \end{cases}$$

Если эта система линейных однородных уравнений имеет единственное решение, то векторы  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  линейно независимы. Если решений бесконечно много, то векторы линейно зависимы. Решим полученную систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2) + (1) \\ (3) - 2(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1) - 2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Так как переменные  $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  являются свободными, то исходная система имеет ненулевое решение. Следовательно векторы  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  линейно зависимы. Найдем, как один из этих векторов выражается через остальные.

Исходная система линейных уравнений эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4 + 2\alpha_5 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 0 \end{cases}.$$

Из этой системы находим, что

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_3 + \alpha_4 - 2\alpha_5 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 \end{cases}.$$

Подставляя  $\alpha_3 = 1, \alpha_4 = \alpha_5 = 0$  получаем, что пятерка  $(-1, -1, 1, 0, 0)$  является решением системы. Тогда справедливо равенство:

$$-a_1 - a_2 + a_3 = 0.$$

Вектор  $a_3$  линейно выражается через векторы  $a_1$  и  $a_2$ , следовательно его можно отбросить. Получим систему векторов  $a_1, a_2, a_4, a_5$ . Снова определим, является ли эта система векторов линейно независимой. Составим линейную комбинацию

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_4 + \beta_4 a_5.$$

Найдем, при каких значениях неизвестных  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  эта линейная комбинация равна нулю. Подставив числовые значения векторов  $a_1, a_2, a_4, a_5$  и сложив получившиеся векторы, получим:

$$(\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 + 4\beta_4, -\beta_1 + 3\beta_2 + 4\beta_3 + \beta_4, 2\beta_1 - 4\beta_2 - 6\beta_3, 2\beta_2 + 2\beta_3 + 2\beta_4) = (0, 0, 0, 0).$$

Система линейных однородных уравнений, которой эквивалентно равенство, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 + 4\beta_4 = 0 \\ -\beta_1 + 3\beta_2 + 4\beta_3 + \beta_4 = 0 \\ 2\beta_1 - 4\beta_2 - 6\beta_3 = 0 \\ 2\beta_2 + 2\beta_3 + 2\beta_4 = 0 \end{cases}$$

Будем решать эту систему методом Гаусса. Для этого надо в точности повторить те преобразования матрицы коэффициентов, которые мы делали в предыдущем случае:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2) + (1) \\ (3) - 2(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -8 & -8 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1) - 2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Неизвестные  $\beta_3, \beta_4$  являются свободными, следовательно исходная система линейных уравнений имеет бесконечно много решений. Тогда векторы  $a_1, a_2, a_4, a_5$  линейно зависимы. Найдем, как один из этих векторов выражается через остальные. Исходная система линейных уравнений эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} \beta_1 - \beta_3 + 2\beta_4 = 0 \\ \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 0 \end{cases}$$

Находим, что четверка  $(1, -1, 1, 0)$  является решением исходной системы. Следовательно справедливо равенство:

$$a_1 - a_2 + a_4 = 0.$$

Вектор  $a_4$  линейно выражается через векторы  $a_1$  и  $a_2$ , следовательно его можно отбросить. Получим систему векторов  $a_1, a_2, a_5$ . Снова определим, являются ли они линейно независимыми. Составляем линейную комбинацию

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_5.$$

Подставляя числовые значения векторов  $a_1, a_2, a_5$  и приравнивая линейную комбинацию к нулевому в  $\mathbb{R}^4$  вектору, получим:

$$(\gamma_1 + 2\gamma_2 + 4\gamma_3, -\gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3, 2\gamma_1 - 4\gamma_2, 2\gamma_2 + 2\gamma_3) = (0, 0, 0, 0).$$

Это равенство эквивалентно следующей системе линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} \gamma_1 + 2\gamma_2 + 4\gamma_3 = 0 \\ -\gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ 2\gamma_1 - 4\gamma_2 = 0 \\ 2\gamma_2 + 2\gamma_3 = 0 \end{cases}$$

Будем решать эту систему уравнений методом Гаусса. Снова повторяем преобразования матрицы коэффициентов, которые делали в предыдущих случаях:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2) + (1) \\ (3) - 2(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1) - 2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Неизвестная  $\gamma_3$  является свободной, следовательно исходная система линейных уравнений имеет бесконечно много решений. Тогда векторы  $a_1, a_2, a_5$  линейно зависимы. Исходная система уравнений эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} \gamma_1 + 2\gamma_3 = 0 \\ \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \end{cases}$$

Находим, что тройка  $(-2, -1, 1)$  является решением исходной системы. Следовательно справедливо равенство:

$$-2a_1 - a_2 + a_5 = 0.$$

Вектор  $a_5$  линейно выражается через векторы  $a_1$  и  $a_2$ , следовательно его можно отбросить. Получим систему векторов  $a_1, a_2$ . Снова определим, является ли она линейно независимой. Составляем линейную комбинацию:

$$\zeta_1 a_1 + \zeta_2 a_2.$$

Подставляя числовые значения векторов  $a_1, a_2$  и приравнивая линейную комбинацию к нулевому вектору в  $\mathbb{R}$ , получим:

$$(\zeta_1 + 2\zeta_2, -\zeta_1 + 3\zeta_2, 2\zeta_1 - 4\zeta_2, 2\zeta_2) = (0, 0, 0, 0).$$

Это равенство эквивалентно следующей системе линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} \zeta_1 + 2\zeta_2 = 0 \\ -\zeta_1 + 3\zeta_2 = 0 \\ 2\zeta_1 - 4\zeta_2 = 0 \\ 2\zeta_2 = 0 \end{cases}$$

Решаем эту систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2) + (1) \\ (3) - 2(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 0 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обе неизвестные  $\zeta_1, \zeta_2$  являются главными, следовательно исходная система уравнений имеет только нулевое решение  $(0, 0)$ . Тогда векторы  $a_1, a_2$  линейно независимы. Они образуют максимальную линейно независимую подсистему.

**Ответ.**  $a_1, a_2$ .

□

**Задача 3.** Дополнить до базиса пространства  $\mathbb{R}^4$  систему векторов:  $a_1 = (2, 1, -4, 3)$ ,  $a_2 = (1, 0, 3, -2)$ .

*Решение.* Заметим, что векторы  $a_1, a_2$  линейно независимы, так как они не пропорциональны (то есть они не отличаются один от другого умножением на число). Добавим к векторам  $a_1, a_2$  стандартный базис пространства  $\mathbb{R}^4$ :

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, 0) \\ e_3 &= (0, 0, 1, 0) \\ e_4 &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

Система векторов  $a_1, a_2, e_1, e_2, e_3, e_4$  является полной в  $\mathbb{R}^4$ , так как содержит базис. Найдем в ней максимальную линейно независимую подсистему, содержащую векторы  $a_1, a_2$ . Для этого запишем линейную комбинацию векторов  $a_1, a_2, e_1, e_2, e_3, e_4$ :

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 e_1 + \alpha_4 e_2 + \alpha_5 e_3 + \alpha_6 e_4.$$

Подставив числовые значения векторов  $a_1, a_2, e_1, e_2, e_3, e_4$ , сложив их и приравняв к нулевому вектору пространства  $\mathbb{R}^4$ , получим:

$$(2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_4, -4\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_5, 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_6) = (0, 0, 0, 0).$$

Это векторное равенство эквивалентно следующей системе линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_4 = 0 \\ -4\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_5 = 0 \\ 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_6 = 0 \end{cases}$$

Определим, сколько решений имеет эта система. Будем решать ее методом Гаусса:

$$\begin{aligned}
& \left( \begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1) - 2(2) \\ (3) + 4(2) \\ (4) - 3(2)}} \left( \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (2)} \\
& \rightarrow \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(3) - 3(2) \\ (4) + 2(2)}} \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -7 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(3) + (4)} \\
& \rightarrow \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -7 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(4) + 2(3)} \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-1 \cdot (3) \\ -1 \cdot (4)}} \\
& \rightarrow \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(3) + 3(4) \\ (2) + 2(4) \\ (1) - 1(4)}} \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{(2) - (3)} \\
& \rightarrow \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Неизвестные  $\alpha_5, \alpha_6$  являются свободными, следовательно исходная система имеет ненулевое решение. Получили, что векторы  $a_1, a_2, e_1, e_2, e_3, e_4$  линейно зависимы. Найдём выражение векторов  $e_3, e_4$  через остальные векторы системы. Полученная система линейных уравнений эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_5 - 3\alpha_6 \\ \alpha_2 = -3\alpha_5 - 4\alpha_6 \\ \alpha_3 = 7\alpha_5 + 10\alpha_6 \\ \alpha_4 = 2\alpha_5 + 3\alpha_6 \end{cases}$$

Подставляя значения  $\alpha_5 = 1, \alpha_6 = 0$ , получаем решение  $(-2, -3, 7, 2, 1, 0)$ . Подставляя значения  $\alpha_5 = 0, \alpha_6 = 1$ , получаем другое решение  $(-3, -4, 10, 3, 0, 1)$ . Так как значения неизвестных  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$  являются числами, при которых линейная комбинация векторов  $a_1, a_2, e_1, e_2, e_3, e_4$  равна нулю, то справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} -2a_1 - 3a_2 + 7e_1 + 2e_2 + e_3 &= 0 \\ -3a_1 - 4a_2 + 10e_1 + 3e_2 + e_4 &= 0 \end{aligned}$$

Следовательно каждый из векторов  $e_3, e_4$  выражается через векторы  $a_1, a_2, e_1, e_2$ . Это означает, что система векторов  $a_1, a_2, e_1, e_2$  является полной в  $\mathbb{R}^4$ . Проверим, что эти векторы линейно независимы. Снова составляем линейную комбинацию:

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 e_1 + \beta_4 e_2.$$

Подставляем числовые значения векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ , складываем векторы и приравниваем линейную комбинацию к нулевому вектору пространства  $\mathbb{R}^4$ . Получим:

$$(2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \beta_1 + \beta_4, -4\beta_1 + 3\beta_2, 3\beta_1 - 2\beta_2) = (0, 0, 0, 0).$$

Это равенство эквивалентно следующей системе линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0 \\ \beta_1 + \beta_4 = 0 \\ -4\beta_1 + 3\beta_2 = 0 \\ 3\beta_1 - 2\beta_2 = 0 \end{cases}$$

Найдем число решений этой системы. Решать будем методом Гаусса, повторяя преобразования, которые совершали в предыдущем случае.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1) - 2(2) \\ (3) + 4(2) \\ (4) - 3(2)}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (2)} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(3) - 3(2) \\ (4) + 2(2)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3) + (4)} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4) + 2(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Исходная система линейных уравнений имеет единственное, а именно нулевое, решение, следовательно векторы  $a_1, a_2, e_1, e_2$  линейно независимы. Дополнением системы векторов  $a_1, a_2$  до базиса пространства  $\mathbb{R}^4$  являются два вектора  $e_1$  и  $e_2$ .

**Ответ.** Базисом являются векторы

$$a_1 = (2, 1, -4, 3), a_2 = (1, 0, 3, -2), e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0).$$

□

**Задача 4.** Доказать, что система векторов  $\{(2, 1, 2), (3, -1, 4), (2, 4, 1)\}$  является базисом пространства  $\mathbb{R}^3$  и найти координаты вектора  $x = (8, -4, 4)$  в этом базисе.



*Решение.* 1. Число векторов в системе  $\{(2, 1, 2), (3, -1, 4), (2, 4, 1)\}$  совпадает с размерностью пространства  $\mathbb{R}^3$ , поэтому для доказательства того, что эти векторы образуют базис, достаточно проверить, что они линейно независимы. Составим линейную комбинацию:

$$\alpha_1(2, 1, 2) + \alpha_2(3, -1, 4) + \alpha_3(2, 4, 1).$$

Сложив векторы и приравняв к нулевому вектору пространства  $\mathbb{R}^3$ , получим:

$$(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2 + 4\alpha_3, 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3) = (0, 0, 0).$$

Это уравнение эквивалентно следующей системе линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Найдем определитель матрицы коэффициентов. Так как число уравнений в системе совпадает с числом неизвестных, то ненулевое значение определителя матрицы коэффициентов влечет единственность решения, откуда следует линейная независимость исходной системы векторов.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 8 + 24 + 4 - 32 - 3 = -1 \neq 0.$$

Следовательно исходные векторы образуют базис пространства  $\mathbb{R}^3$ .

2. Найдем координаты вектора  $x = (8, -4, 4)$  в базисе  $\{(2, 1, 2), (3, -1, 4), (2, 4, 1)\}$ . По определению, координатами вектора  $x$  является тройка чисел  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , удовлетворяющая уравнению:

$$\alpha_1(2, 1, 2) + \alpha_2(3, -1, 4) + \alpha_3(2, 4, 1) = (8, -4, 4).$$

Это уравнение эквивалентно следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 8 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 4\alpha_3 = -4 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3 = 4 \end{cases}$$

Будем решать эту систему методом Гаусса.

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 4 & -4 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1) - 2(2) \\ (3) - 2(2) \\ (1) \leftrightarrow (2)}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -6 & 16 \\ 0 & 6 & -7 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow{(3) - (2)} \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -6 & 16 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{(2) - 5(3)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 36 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-1 \cdot (2) \\ (2) \leftrightarrow (3)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -36 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{(1) - 4(3) \\ (2) + (3)}]{} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 140 \\ 0 & 1 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 1 & -36 \end{array} \right) \xrightarrow{(1) + (2)} \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 1 & -36 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Таким образом координатами вектора  $x$  является тройка  $(100, -40, -36)$ .

**Ответ.**  $x = (100, -40, -36)$  в базисе  $\{(2, 1, 2), (3, -1, 4), (2, 4, 1)\}$ .

□

**Задача 5.** Доказать, что каждая из систем векторов

$$E = \{(2, 1, 2), (3, -1, 4), (2, 4, 1)\} \text{ и } F = \{(-1, 0, 1), (2, 1, 0), (1, 2, -1)\}$$

является базисом пространства  $\mathbb{R}^3$  и найти матрицу перехода от  $E$  к  $F$ .

*Решение.* 1. Покажем, что системы  $E$  и  $F$  образуют базис. Так как количество векторов в каждой системе совпадает с размерностью пространства  $\mathbb{R}^3$ , то достаточно проверить линейную независимость векторов в каждой системе. Для этого можно посчитать значение определителя матрицы, составленной из векторов каждой системы. Если определитель не равен 0, то векторы линейно независимы.

$$\text{Для системы векторов } E: \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 24 + 8 + 4 - 32 - 3 = -1 \neq 0, \text{ значит}$$

векторы системы  $E$  образуют базис пространства  $\mathbb{R}^3$ .

$$\text{Для системы векторов } F: \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 4 - 1 = 4 \neq 0, \text{ значит и система } F$$

образует базис пространства  $\mathbb{R}^3$ .

2. Найдем матрицу перехода  $T_{E \rightarrow F}$  от базиса  $E$  к базису  $F$ . Для этого мы должны найти координаты каждого вектора из системы векторов  $F$  в базисе векторов  $E$ .

Для первого вектора из системы векторов  $F$  мы должны найти такие  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , что выполняется равенство

$$(-1, 0, 1) = \alpha_1 \cdot (2, 1, 2) + \alpha_2 \cdot (3, -1, 4) + \alpha_3 \cdot (2, 4, 1).$$

Это эквивалентно решению системы из трех уравнений:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = -1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{cases}.$$

В матричном виде эта система имеет вид

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Для второго вектора системы векторов  $F$  мы точно также должны найти такие  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ , что выполняется равенство:

$$(2, 1, 0) = \beta_1 \cdot (2, 1, 2) + \beta_2 \cdot (3, -1, 4) + \beta_3 \cdot (2, 4, 1).$$

Это эквивалентно решению системы линейных уравнений, которая в матричной записи имеет вид:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Аналогично для третьего вектора системы векторов  $F$  мы должны найти такие  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , что выполняется равенство:

$$(1, 2, -1) = \gamma_1 \cdot (2, 1, 2) + \gamma_2 \cdot (3, -1, 4) + \gamma_3 \cdot (2, 4, 1).$$

Это эквивалентно решению системы линейных уравнений, которая в матричной записи имеет вид:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

Заметим теперь, что для нахождения  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , нам необходимо решить три системы, которые имеют одинаковую левую часть. Поэтому можно решать одну систему, но с тремя столбцами свободных членов:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Решим полученную систему методом Гаусса:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -6 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -7 & 1 & -2 & -5 \end{array} \right) \longrightarrow \\ & \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -6 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & -2 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -11 & 10 & 7 \end{array} \right) \longrightarrow \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -31 & 29 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -12 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -10 & -7 \end{array} \right).$$

Таким образом получаем, что

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= (-31, 13, 11) \\ (\beta_1, \beta_2, \beta_3) &= (29, -12, -10) \\ (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) &= (21, -9, -7) \end{aligned}$$

Так как матрица перехода от базиса  $E$  к базису  $F$  составлена из координат векторов системы векторов  $F$  в базисе  $E$ , записанных в столбцы, то:

$$T_{E \rightarrow F} = \begin{pmatrix} -31 & 29 & 21 \\ 13 & -12 & -9 \\ 11 & -10 & -7 \end{pmatrix}.$$

**Ответ.**  $T_{E \rightarrow F} = \begin{pmatrix} -31 & 29 & 21 \\ 13 & -12 & -9 \\ 11 & -10 & -7 \end{pmatrix}.$

□

## 2 Подпространства

**Задача 6.** Проверить, образуют ли подпространство векторы пространства  $\mathbb{R}^n$ , координаты которых удовлетворяют уравнению

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a,$$

где  $a \in \mathbb{R}$  — фиксированное число.

*Решение.* Обозначим  $L_a = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 + \dots + x_n = a\}$ . Множество  $L_a$  является подпространством тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет двум условиям:

1. Для любых двух векторов  $x, y \in L_a$  их сумма  $x + y$  также является вектором из  $L_a$ ;
2. Для любого вектора  $x \in L_a$  и любого числа  $\alpha \in \mathbb{R}$  вектор  $\alpha x$  также принадлежит  $L_a$ .

Проверим оба эти условия.

1. Пусть  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  и пусть  $x, y \in L_a$ . Тогда

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = a$$

По определению суммы векторов  $x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ . Вектор  $x + y \in L_a$  тогда и только тогда, когда

$$(x_1 + y_1) + \dots + (x_n + y_n) = a.$$

Левая часть этого равенства принимает значение  $2a$ . Равенство  $2a = a$  справедливо только при  $a = 0$ . Таким образом первое условие справедливо только при  $a = 0$ .

2. Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in L_a$ . Тогда

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a.$$

По определению умножения вектора на число  $\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$ . Тогда вектор  $\alpha x \in L_a$  тогда и только тогда, когда

$$\alpha x_1 + \dots + \alpha x_n = a.$$

Левая часть этого равенства принимает значение  $\alpha a$ . Равенство  $\alpha a = a$  должно выполняться при любом значении  $\alpha$ . Это возможно только при  $a = 0$ . Таким образом множество  $L_a$  является подпространством только при  $a = 0$ .

**Ответ.** При  $a = 0$  множество  $L_a$  является подпространством пространства  $\mathbb{R}^n$ , при остальных значениях  $a$  — нет.

□

**Задача 7.** Найти размерность и какой-нибудь базис линейной оболочки системы векторов

$$a_1 = (1, -1, -2, 1), a_2 = (2, 2, -1, -1), a_3 = (1, -1, -1, 1), a_4 = (1, -5, -3, 4), \\ a_5 = (-1, -2, 1, 1).$$

*Решение.* Обозначим через  $L$  линейную оболочку системы векторов  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ .  $L = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \rangle$ . По определению базисом линейной оболочки  $L$  является линейно независимая и полная в  $L$  система векторов. Из определения линейной оболочки следует, что система векторов  $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$  полна в  $L$ , так как любой вектор из  $L$  можно представить в виде линейной комбинации векторов  $a_1, \dots, a_5$ . Следовательно для нахождения базиса  $L$  достаточно выделить максимальную линейно независимую подсистему из системы векторов  $\{a_1, \dots, a_5\}$ .

Составим линейную комбинацию:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 + \alpha_5 a_5.$$

Подставив числовые значения векторов  $a_1, \dots, a_5$  и приравняв эту линейную комбинацию к нулевому вектору пространства  $\mathbb{R}^4$ , получим:

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5, -\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 - 5\alpha_4 - 2\alpha_5, -2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - 3\alpha_4 + \alpha_5, \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + 4\alpha_4 + \alpha_5) = (0, 0, 0, 0)$$

Это равенство эквивалентно следующей системе линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 - 5\alpha_4 - 2\alpha_5 = 0 \\ -2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - 3\alpha_4 + \alpha_5 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + 4\alpha_4 + \alpha_5 = 0 \end{cases}$$

Будем решать эту систему методом Гаусса, приводя ее матрицу коэффициентов к ступенчатому виду:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -5 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2)+(1) \\ (3)+2(1) \\ (4)-(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2)+(4) \\ (3)+(4)}} \\
 & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)+3(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Неизвестные  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$  являются главными, а неизвестная  $\alpha_4$  является свободной. Следовательно вектор  $a_4$  представляется в виде линейной комбинации векторов  $a_1, a_2, a_3, a_5$ . Тогда максимальной линейно независимой подсистемой в системе векторов  $\{a_1, \dots, a_5\}$  являются векторы  $a_1, a_2, a_3, a_5$ , которые и составляют базис линейной оболочки  $L$ , при этом размерность подпространства  $L$  равна 4.

**Ответ.** Размерность равна 4, базис состоит из векторов  $a_1, a_2, a_3, a_5$ .

□

**Задача 8.** Найти базис суммы и пересечения линейных оболочек

$$\begin{aligned}
 S &= \langle (1, 3, -2, 1), (3, 1, 0, 1), (9, 4, -1, 4) \rangle \\
 T &= \langle (-1, -2, 1, 1), (-1, -9, 6, 1), (0, 7, -5, 0) \rangle.
 \end{aligned}$$

*Решение.* Обозначим порождающие векторы из систем векторов  $S$  и  $T$  через  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ :

$$\begin{aligned}
 a_1 &= (1, 3, -2, 1), & b_1 &= (-1, -2, 1, 1), \\
 a_2 &= (3, 1, 0, 1), & b_2 &= (-1, -9, 6, 1), \\
 a_3 &= (9, 4, -1, 4), & b_3 &= (0, 7, -5, 0).
 \end{aligned}$$

Тогда  $S = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  и  $T = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ .

1. Прежде чем находить базисы суммы пространств  $S + T$  и пересечения пространств  $S \cap T$ , необходимо проверить, является ли каждая из систем векторов  $\{a_1, a_2, a_3\}$  и  $\{b_1, b_2, b_3\}$  линейно независимой. Составим линейную комбинацию векторов  $a_1, a_2, a_3$  и приравняем ее к нулю:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0.$$

Подставив числовые значения векторов  $a_1, a_2, a_3$ , получим:

$$(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3, 3\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3, -2\alpha_1 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3) = (0, 0, 0, 0).$$

Это равенство эквивалентно следующей системе линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Будем решать эту систему методом Гаусса, приводя ее матрицу коэффициентов к ступенчатому виду:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(2) - 3(1) \\ (3) + 2(1) \\ (4) - (1)}} \left( \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -8 & -23 \\ 0 & 6 & 17 \\ 0 & -2 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-1 \cdot (2) \\ -1 \cdot (4) \\ (2) \leftrightarrow (4)}} \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 17 \\ 0 & 8 & 23 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(3) - 3(2) \\ (4) - 4(2)}} \left( \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{(4) - \frac{3}{2}(3)} \left( \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Система имеет только нулевое решение, следовательно векторы  $a_1, a_2, a_3$  линейно независимы.

Проверим линейную независимость системы векторов  $\{b_1, b_2, b_3\}$ . Аналогично имеем:

$$(-\beta_1 - \beta_2, -2\beta_1 - 9\beta_2 + 7\beta_3, \beta_1 + 6\beta_2 - 5\beta_3, \beta_1 + \beta_2) = (0, 0, 0, 0).$$

Это равенство эквивалентно следующей системе линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -\beta_1 - \beta_2 = 0 \\ -2\beta_1 - 9\beta_2 + 7\beta_3 = 0 \\ \beta_1 + 6\beta_2 - 5\beta_3 = 0 \\ \beta_1 + \beta_2 = 0 \end{cases}$$

Решаем систему методом Гаусса, приводя ее матрицу коэффициентов к ступенчатому виду:

$$\left( \begin{array}{ccc} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -9 & 7 \\ 1 & 6 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(2) - 2(1) \\ (3) + (1) \\ (4) + (1)}} \left( \begin{array}{ccc} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(3) + \frac{5}{7}(2) \\ -1 \cdot (1) \\ -\frac{1}{7} \cdot (2)}} \left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Неизвестная  $\beta_3$  является свободной, следовательно исходная система линейных однородных уравнений имеет бесконечно много решений, а поэтому имеет ненулевое решение.

Получили, что векторы  $b_1, b_2, b_3$  линейно зависимы, причем максимальной линейно независимой подсистемой является система, состоящая из любых двух векторов из множества  $\{b_1, b_2, b_3\}$ . Например, можно взять  $b_1$  и  $b_2$ .

2. Перейдем к построению базиса суммы  $S + T$  и пересечения  $S \cap T$  данных подпространств  $S$  и  $T$ . Общий алгоритм состоит в повторном выполнении следующих шагов: к базису линейной оболочки  $S$  последовательно по одному добавляем базисные векторы линейной оболочки  $T$ , и каждый раз проверяем, является ли полученное семейство векторов линейно независимым. Если векторы линейно независимы, то они образуют часть базиса суммы  $S + T$ . Если векторы линейно зависимы, то их линейная комбинация равна нулевому вектору при ненулевых коэффициентах. Тогда мы выражаем один и тот же вектор пространства  $\mathbb{R}^4$  через базисные векторы линейных оболочек  $S$  и  $T$ , при этом полученный вектор является одним из базисных векторов пространства  $S \cap T$ . Далее мы берем следующий вектор базиса линейной оболочки  $T$ , добавляем его к найденным векторам из базиса суммы  $S + T$  (при этом мы не обращаем внимания на найденные до этого базисные векторы из подпространства  $S \cap T$ ), проверяем линейную независимость, и так далее, пока не переберем по одному все базисные векторы из пространства  $T$ .

2.1. Рассмотрим систему векторов  $\{a_1, a_2, a_3, b_1\}$ . Проверим, являются ли эти векторы линейно независимыми. Составляем линейную комбинацию:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 b_1.$$

Подставив числовые значения векторов  $a_1, a_2, a_3, b_1$  и приравняв эту линейную комбинацию к нулевому вектору пространства  $\mathbb{R}^4$ , получим:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3 - \alpha_4, 3\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 - 2\alpha_4, -2\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 + \alpha_4) = (0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Это равенство эквивалентно следующей системе линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 - 2\alpha_4 = 0 \\ -2\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Будем решать эту систему методом Гаусса, приводя ее матрицу коэффициентов к ступенчатому виду с помощью тех же самых элементарных преобразований строк, которые совершали при проверке линейной независимости системы векторов  $\{a_1, a_2, a_3\}$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (2) - 3(1) \\ (3) + 2(1) \\ (4) - (1) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 \\ 0 & -8 & -23 & 1 \\ 0 & 6 & 17 & -1 \\ 0 & -2 & -5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -1 \cdot (2) \\ -1 \cdot (4) \\ (2) \leftrightarrow (4) \end{matrix}}$$



$$\begin{aligned}
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 17 & -1 \\ 0 & 8 & 23 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(3) - 3(2) \\ (4) - 4(2)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4) - (3)} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3) - 2(4)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3) \leftrightarrow (4)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Система имеет только нулевое решение, следовательно векторы  $a_1, a_2, a_3, b_1$  линейно независимы. ]получили, что они являются частью базиса суммы  $S + T$ .

2.2. Рассмотрим систему векторов  $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\}$ . Проверим, являются ли эти векторы линейно независимыми. Составим линейную комбинацию:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 b_1 + \alpha_5 b_2.$$

Подставив числовые значения векторов  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$  и приравняв эту линейную комбинацию к нулевому вектору пространства  $\mathbb{R}^4$ , получим:

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5, 3\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 - 2\alpha_4 - 9\alpha_5, \\
&\quad -2\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4 + 6\alpha_5, \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) = (0, 0, 0, 0).
\end{aligned}$$

Это равенство эквивалентно следующей системе линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 - 2\alpha_4 - 9\alpha_5 = 0 \\ -2\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4 + 6\alpha_5 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 0 \end{cases}$$

Снова будем решать эту систему методом Гаусса, приводя ее матрицу коэффициентов к ступенчатому виду:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & -2 & -9 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(2) - 3(1) \\ (3) + 2(1) \\ (4) - (1)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -23 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 17 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-1 \cdot (2) \\ -1 \cdot (4) \\ (2) \leftrightarrow (4)}]{} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 6 & 17 & -1 & 4 \\ 0 & 8 & 23 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(3) - 3(2) \\ (4) - 4(2)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4) - (3)} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3) - 2(4)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3) \leftrightarrow (4)}
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Неизвестная  $\alpha_5$  является свободной, следовательно векторы  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$  линейно зависимы. Найдем частное решение исходной системы. Для этого с помощью элементарных преобразований над строками матрицы приведем ее к виду, в котором в каждом столбце, соответствующем главной неизвестной, стоит ровно одно ненулевое число.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1) + (4) \\ (2) + 2(4) \\ (3) - 2(4)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1) - 9(3) \\ (2) - 5(3)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1) - \frac{3}{2}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Исходная система уравнений равносильна следующей:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2\alpha_5 \\ 2\alpha_2 = -2\alpha_5 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = -2\alpha_5 \end{cases}$$

Положим  $\alpha_5 = 1$  и получим решение системы уравнений  $(2, -1, 0, -2, 1)$ . Следовательно справедливо следующее равенство:

$$2a_1 - a_2 - 2b_1 + b_2 = 0.$$

Оставив векторы  $a_1, a_2$  в одной части равенства, и перенеся векторы  $b_1, b_2$  в другую, получим:

$$2a_1 - a_2 = 2b_1 - b_2.$$

Таким образом, вектор  $(-1, 5, -4, 1) = 2a_1 - a_2 = 2b_1 - b_2$  можно выразить как через векторы  $a_1, a_2, a_3$ , так и через векторы  $b_1, b_2, b_3$ . Следовательно этот вектор лежит как в линейной оболочке  $S$ , так и в линейной оболочке  $T$ , а значит он принадлежит пересечению  $S \cap T$ . Вектор  $(-1, 5, -4, 1)$  возьмем в качестве первого (и единственного) базисного вектора пересечения  $S \cap T$ .

Проверим равенство для размерности:

$$\dim S + \dim T = \dim(S + T) + \dim(S \cap T).$$

Ранее нашли, что  $\dim S = 3$ ,  $\dim T = 2$ ,  $\dim(S + T) = 4$  и  $\dim(S \cap T) = 1$ . Равенство

$$3 + 2 = 4 + 1$$

является верным.

**Ответ.** Базис суммы  $S + T$ :  $a_1, a_2, a_3, b_1$

Базис пересечения  $S \cap T$ :  $2a_1 - a_2 = 2b_1 - b_2$ .

□

**Задача 9.** Найти фундаментальную систему решений для следующей системы линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases}.$$

*Решение.* Нахождение фундаментальной системы решений для системы линейных однородных уравнений состоит в последовательном выполнении двух шагов. Сначала мы должны привести матрицу коэффициентов системы к специальному “каноническому” виду, используя элементарные преобразования над строками. Под “каноническим” видом матрицы понимается такой вид, при котором несколько столбцов матрицы (их количество равно рангу матрицы) образуют единичную подматрицу, а в остальных столбцах могут стоять произвольные элементы. Вторым этапом является выписывание самого базиса пространства решений (фундаментальной системы решений).

1. Матрица коэффициентов данной системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -5 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Будем приводить эту матрицу к “каноническому” виду с помощью элементарных преобразований строк.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -5 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2)-(1) \\ (3)-(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(4)+(1) \\ (3)-2(1)}} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Последняя матрица является “канонической”, так как первые два столбца матрицы образуют единичную подматрицу.

2. Теперь, используя найденный “канонический” вид матрицы, выпишем фундаментальную систему решений. Она состоит из  $n - r$  векторов, где  $n$  — число столбцов матрицы, а  $r$  — ее ранг. В нашем случае  $n = 5, r = 2$ , следовательно фундаментальная система решений состоит из трех векторов. На тех местах элементов векторов, которые соответствуют столбцам вне единичной матрицы, мы последовательно выставляем нули и одну 1-цу. Получим:

$$\begin{aligned} a_1 &= (\dots, \dots, 1, 0, 0), \\ a_2 &= (\dots, \dots, 0, 1, 0), \\ a_3 &= (\dots, \dots, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

На самом деле указанным местам в векторах можно присваивать произвольные значения, но так, чтобы определитель матрицы, составленный из этих значений, был не равен нулю. Другими словами все три вектора должны быть линейно независимы.

Теперь найдем значения элементов векторов  $a_1, a_2, a_3$  на оставшихся местах. Для этого надо вспомнить, что каждая строка матрицы — это уравнение. Из этих уравнений можно найти, что неизвестные  $x_1, x_2$  выражаются через  $x_3, x_4, x_5$  следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_2 = -2x_3 + x_4 + x_5 \end{cases}.$$

Подставляя значения  $x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$  находим, что первый вектор

$$a_1 = (1, -2, 1, 0, 0).$$

Точно также, подставляя в эти два уравнения, выражающие  $x_1$  и  $x_2$  через остальные переменные, значения  $x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$ , находим, что

$$a_2 = (-4, 1, 0, 1, 0).$$

Наконец, подставляя  $x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$ , находим, что

$$a_3 = (-2, 1, 0, 0, 1).$$

**Ответ.**  $a_1 = (1, -2, 1, 0, 0), a_2 = (-4, 1, 0, 1, 0), a_3 = (-2, 1, 0, 0, 1).$

□

### 3 Линейные преобразования и отображения

**Задача 10.** *Отображение  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  задано правилом:*

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_1 + x_2 - 3x_3, x_1 - x_2 + 3x_3, -x_2 + 2x_3, x_1 + x_3).$$

*Доказать, что  $\varphi$  является линейным отображением и найти его матрицу в стандартных базисах пространств  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^4$ .*

*Решение.* 1. Для того, чтобы доказать, что отображение  $\varphi$  является линейным, необходимо проверить два свойства:

1. Для любых векторов  $a, b \in \mathbb{R}^3$  справедливо равенство  $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ ;
2. Для любого вектора  $a \in \mathbb{R}^3$  и любого числа  $\alpha \in \mathbb{R}$  справедливо равенство  $\varphi(\alpha a) = \alpha \varphi(a)$ .

1.1. Пусть  $a = (a_1, a_2, a_3)$  и  $b = (b_1, b_2, b_3)$ . Тогда  $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ . Найдем значение  $\varphi(a + b)$ :

$$\begin{aligned}\varphi(a + b) &= \varphi(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) = (-(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) - 3(a_3 + b_3), \\ &\quad (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) + 3(a_3 + b_3), -(a_2 + b_2) + 2(a_3 + b_3), (a_1 + b_1) + (a_2 + b_3)).\end{aligned}$$

Раскроем скобки и соберем компоненты векторов  $a$  и  $b$  по отдельности. Получим:

$$\begin{aligned}\varphi(a + b) &= ((-a_1 + a_2 - 3a_3) + (-b_1 + b_2 - 3b_3), (a_1 - a_2 + 3a_3) + (b_1 - b_2 + 3b_3), \\ &\quad (-a_2 + 2a_3) + (-b_2 + 2b_3), (a_1 + a_3) + (b_1 + b_3)).\end{aligned}$$

Найдем теперь значения  $\varphi(a)$  и  $\varphi(b)$  по отдельности:

$$\varphi(a) = (-a_1 + a_2 - 3a_3, a_1 - a_2 + 3a_3, -a_2 + 2a_3, a_1 + a_3),$$

$$\varphi(b) = (-b_1 + b_2 - 3b_3, b_1 - b_2 + 3b_3, -b_2 + 2b_3, b_1 + b_3).$$

Тогда:

$$\begin{aligned}\varphi(a) + \varphi(b) &= (-a_1 + a_2 - 3a_3, a_1 - a_2 + 3a_3, -a_2 + 2a_3, a_1 + a_3) + \\ &\quad + (-b_1 + b_2 - 3b_3, b_1 - b_2 + 3b_3, -b_2 + 2b_3, b_1 + b_3) = \\ &= ((-a_1 + a_2 - 3a_3) + (-b_1 + b_2 - 3b_3), (a_1 - a_2 + 3a_3) + \\ &\quad + (b_1 - b_2 + 3b_3), (-a_2 + 2a_3) + (-b_2 + 2b_3), (a_1 + a_3) + (b_1 + b_3)) = \varphi(a + b).\end{aligned}$$

1.2. Пусть  $a = (a_1, a_2, a_3)$  и  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\alpha a = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$ . Найдем значение  $\varphi(\alpha a)$ :

$$\varphi(\alpha a) = \varphi(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3) = (-\alpha a_1 + \alpha a_2 - 3\alpha a_3, \alpha a_1 - \alpha a_2 + 3\alpha a_3, -\alpha a_2 + 2\alpha a_3, \alpha a_1 + \alpha a_3).$$

Вынесем коэффициент  $\alpha$  за скобки в каждой компоненте получившегося вектора. Получим:

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha a) &= (\alpha(-a_1 + a_2 - 3a_3), \alpha(a_1 - a_2 + 3a_3), \alpha(-a_2 + 2a_3), \alpha(a_1 + a_3)) = \\ &= \alpha(-a_1 + a_2 - 3a_3, a_1 - a_2 + 3a_3, -a_2 + 2a_3, a_1 + a_3) = \alpha \varphi(a).\end{aligned}$$

Таким образом, отображение  $\varphi$  действительно является линейным.

2. Найдём матрицу отображения  $\varphi$  в стандартных базисах пространств  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^4$ . Напомним, что стандартный базис пространства  $\mathbb{R}^3$  состоит из векторов

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0) \\ e_3 &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Стандартный базис пространства  $\mathbb{R}^4$  состоит из векторов

$$\begin{aligned} f_1 &= (1, 0, 0, 0) \\ f_2 &= (0, 1, 0, 0) \\ f_3 &= (0, 0, 1, 0) \\ f_4 &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

Чтобы найти матрицу отображения  $\varphi$  в базисах  $\{e_1, e_2, e_3\}$  и  $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$  достаточно найти образы векторов  $e_1, e_2, e_3$  под действием отображения  $\varphi$  и найти координаты этих образов в базисе  $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ .

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= \varphi(1, 0, 0) = (-1, 1, 0, 1) = -f_1 + f_2 + f_4 \\ \varphi(e_2) &= \varphi(0, 1, 0) = (1, -1, -1, 0) = f_1 - f_2 - f_3 \\ \varphi(e_3) &= \varphi(0, 0, 1) = (-3, 3, 2, 1) = -3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + f_4 \end{aligned}$$

Записав координаты образов векторов  $e_1, e_2, e_3$  в базисе  $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$  в столбцы матрицы, получим искомую матрицу линейного отображения

$$[\varphi]_{e_1, e_2, e_3}^{f_1, f_2, f_3, f_4} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Ответ.**  $[\varphi]_{e_1, e_2, e_3}^{f_1, f_2, f_3, f_4} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

□

**Задача 11.** Найти базис ядра и образа линейного отображения, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

*Решение.* 1. Пусть матрица из условия задачи задает линейное отображение  $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ . Напомним, что

$$\ker \varphi = \{x \in \mathbb{R}^4 | \varphi(x) = 0\}.$$

Пусть  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Вектор  $x$  является элементом ядра тогда и только тогда, когда  $\varphi(x) = 0$ . Найдем образ вектора  $x$  под действием отображения  $\varphi$ :

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 \\ -3x_2 + x_3 - 2x_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда условие  $\varphi(x) = 0$  эквивалентно следующей системе линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Базисом ядра  $\ker \varphi$  является в точности базис пространства решений этой системы линейных однородных уравнений. Найдем его (то есть фундаментальную систему решений):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2) - 2(1) \\ (3) - 3(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(3) - (2) \\ (4) - (2)}} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1) + (2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Мы привели матрицу коэффициентов исходной системы к “каноническому” виду, так как первый и третий столбцы как раз образуют единичную подматрицу. Из получившейся матрицы следует, что неизвестные  $x_1, x_2, x_3, x_4$  связаны соотношениями:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ x_3 = 3x_2 + 2x_4 \end{cases}$$

Следовательно фундаментальная система решений состоит из двух векторов:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 1, 3, 0) \\ e_2 &= (1, 0, 2, 1) \end{aligned}$$

Векторы  $e_1, e_2$  образуют базис ядра линейного преобразования  $\varphi$ .

2. Найдем базис образа  $Im \varphi$ . Напомним, что

$$Im \varphi = \{x \in \mathbb{R}^4 | \exists y \in \mathbb{R}^4, \varphi(y) = x\}.$$

Так как отображение  $\varphi$  задано матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

то столбцы этой матрицы являются образами под действием отображения  $\varphi$  базисных векторов пространства  $\mathbb{R}^4$ . Образ полной системы векторов является полной системой в образе  $Im\varphi$ , поэтому следующие векторы:

$$\begin{aligned}f_1 &= (1, 2, 3, 0) \\f_2 &= (2, 1, 3, -3) \\f_3 &= (-1, -1, -2, 1) \\f_4 &= (1, 0, 1, -2)\end{aligned}$$

образуют полную систему в образе  $Im\varphi$ . Векторы  $f_1, f_2, f_3$  и  $f_4$  составлены из столбцов матрицы отображения  $\varphi$ . Чтобы найти базис, достаточно выделить из них максимальную линейно независимую подсистему. Составим линейную комбинацию:

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \alpha_4 f_4.$$

Подставив числовые значения векторов  $f_1, f_2, f_3, f_4$  и приравняв эту линейную комбинацию к нулевому вектору пространства  $\mathbb{R}^4$ , получим:

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4, 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, 3\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4, -3\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_4) = (0, 0, 0, 0).$$

Это равенство эквивалентно следующей системе линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ -3\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Будем решать эту систему методом Гаусса, приводя ее матрицу коэффициентов к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2) - 2(1) \\ (3) - 3(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(3) - (2) \\ (4) - (2)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Неизвестные  $\alpha_3$  и  $\alpha_4$  являются свободными, следовательно каждый из векторов  $f_3, f_4$  линейно выражается через векторы  $f_1, f_2$ . Тогда максимальной линейно независимой подсистемой является система, состоящая из векторов  $f_1$  и  $f_2$ .

**Ответ.** Базис ядра:  $e_1 = (1, 1, 3, 0), e_2 = (1, 0, 2, 1)$ .

Базис образа:  $f_1 = (1, 2, 3, 0), f_2 = (2, 1, 3, -3)$ .

□

**Задача 12.** Найти какой-нибудь прообраз вектора  $(1, 2, 3)$  под действием линейного отображения, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$



*Решение.* Пусть  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  — отображение, заданное в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Прообраз вектора  $(1, 2, 3)$  — это такой вектор  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , что справедливо соотношение:

$$\varphi(x) = (1, 2, 3).$$

Найдем образ вектора  $x$  под действием отображения  $\varphi$ :

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда равенство  $\varphi(x) = (1, 2, 3)$  эквивалентно следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Будем решать эту систему методом Гаусса, приводя ее матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right) & \xrightarrow{\substack{(1) - 2(3) \\ (2) + (3)}} \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & -5 & -5 \\ 0 & 7 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1) + (2) \\ (2) \leftrightarrow (3)}} \\ \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 5 & 5 \\ 0 & 7 & 5 & 5 \end{array} \right) & \xrightarrow{\frac{1}{7} \cdot (2)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 7 & 5 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{(1) - 3(2)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{6}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 7 & 5 & 5 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Неизвестная  $x_3$  является свободной, следовательно исходная система имеет бесконечно много решений. Это означает, что у вектора  $(1, 2, 3)$  существует бесконечно много прообразов. Найдем один из них.

Неизвестные  $x_1, x_2$  связаны с  $x_3$  следующими соотношениями:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{6}{7} - \frac{6}{7}x_3 \\ x_2 = \frac{5}{7} - \frac{5}{7}x_3 \end{cases}$$

Выбрав  $x_3 = 1$ , найдем одно из решений исходной системы:

$$(0, 0, 1).$$

Таким образом, вектор  $x = (0, 0, 1)$  является прообразом вектора  $(1, 2, 3)$  под действие отображения  $\varphi$ .

**Ответ.**  $(0, 0, 1)$ .

□

**Задача 13.** Пусть линейное отображение  $\varphi: V \rightarrow W$  в базисах  $\{e_1, e_2, e_3\}$  пространства  $V$  и  $\{f_1, f_2\}$  пространства  $W$  имеет матрицу  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Найдите матрицу отображения  $\varphi$  в базисах  $\{e_1 + e_2 + e_3, -e_1 + e_2, e_1 + e_2\}$  и  $\{2f_1 + f_2, f_1 + f_2\}$ .

*Решение.* Пусть  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  — матрица отображения  $\varphi$  в базисах  $\{e_1, e_2, e_3\}$  и  $\{f_1, f_2\}$ , и пусть  $A'$  — матрица того же отображения  $\varphi$  в базисах  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$  и  $\{f'_1, f'_2\}$ , где

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1 + e_2 + e_3 & f'_1 &= 2f_1 + f_2 \\ e'_2 &= -e_1 + e_2 & f'_2 &= f_1 + f_2 \\ e'_3 &= e_1 + e_2 \end{aligned}$$

Матрицы  $A$  и  $A'$  связаны соотношением:

$$A' = T_{f \rightarrow f'}^{-1} \cdot A \cdot T_{e \rightarrow e'},$$

где  $T_{e \rightarrow e'}$  — матрица перехода от базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$  к базису  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , и  $T_{f \rightarrow f'}$  — матрица перехода от базиса  $\{f_1, f_2\}$  к базису  $\{f'_1, f'_2\}$ . Так как векторы  $e'_1, e'_2, e'_3$  и  $f'_1, f'_2$  заданы, как линейные комбинации векторов  $e_1, e_2, e_3$  и  $f_1, f_2$  соответственно, то

$$T_{e \rightarrow e'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } T_{f \rightarrow f'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу  $T_{f \rightarrow f'}^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{aligned} A' &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Ответ.**  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ .

□

## 4 Инвариантные подпространства

**Задача 14.** Линейное преобразование  $\varphi$  задано в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные векторы и собственные значения преобразования  $\varphi$ .

*Решение.* 1. Найдем собственные значения преобразования  $\varphi$ . Напомним, что собственные значения — это корни уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

где  $E$  — единичная матрица порядка 4.

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель этой матрицы разложением по третьей строке:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -\lambda & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (2-\lambda)(-\lambda(1-\lambda)^2 - 2 + 2 - 2(1-\lambda) + \lambda + 2(1-\lambda)) = \\ &= (2-\lambda)(\lambda - \lambda(1-\lambda)^2) = (2-\lambda)\lambda(1-1+\lambda)(1+1-\lambda) = (2-\lambda)^2\lambda^2 \end{aligned}$$

Тогда корнями уравнения  $\det(A - \lambda E) = 0$  являются  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$ , причем оба корня имеют кратность 2.

2. Найдем собственные векторы, отвечающие собственным значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

2.1.  $\lambda_1 = 2$ . Напомним, что ненулевой вектор  $v$  является собственным вектором, отвечающим собственному значению  $\lambda_1 = 2$ , тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$\mathcal{A}(v) = 2 \cdot v.$$

Пусть  $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ . Найдем образ вектора  $v$  под действием преобразования  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A}(v) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2v_2 + 3v_3 + 2v_4 \\ v_1 + v_2 - v_3 - v_4 \\ 2v_3 \\ v_1 - v_2 + v_4 \end{pmatrix}.$$

Уравнение  $\mathcal{A}(v) = 2 \cdot v$  эквивалентно следующей системе линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -2v_1 - 2v_2 + 3v_3 + 2v_4 = 0 \\ v_1 - v_2 - v_3 - v_4 = 0 \\ v_1 - v_2 - v_4 = 0 \end{cases}$$

Найдем фундаментальную систему решений этой системы линейных однородных уравнений.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(3) - (2)}]{(1) + 2(2)} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (2)} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(2) - (3)}]{(1) + (3)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{4}(2)} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1) + (2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного вектора  $(1, 0, 0, 1)$ . Собственные векторы, отвечающие собственному значению  $\lambda_1$ , образуют пространство размерности 1, поэтому ищется базис этого пространства. Найденный вектор из фундаментальной системы решений образует базис этого пространства, и следовательно является собственным вектором, отвечающим собственному значению  $\lambda_1 = 2$ .

2.2.  $\lambda_2 = 0$ . В этом случае уравнение  $\mathcal{A}(v) = 0 \cdot v$  эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} -2v_2 + 3v_3 + 2v_4 = 0 \\ v_1 + v_2 - v_3 - v_4 = 0 \\ 2v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 + v_4 = 0 \end{cases}$$

Найдем фундаментальную систему решений этой системы линейных однородных уравнений.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(1) \leftrightarrow (2)}]{(4) - (2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4) - (2)} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}(3)}]{-\frac{1}{2}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(2) + \frac{3}{2}(3)}]{(1) + (3)} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1) - (2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного вектора  $(0, 1, 0, 1)$ . Собственные векторы, отвечающие собственному значению  $\lambda_2$ , образуют пространство размерности 1, поэтому ищется базис этого пространства. Найденный вектор из фундаментальной системы решений образует базис этого пространства, и следовательно является собственным вектором, отвечающим собственному значению  $\lambda_2 = 0$ .

**Ответ.** Собственный вектор  $(1, 0, 0, 1)$  отвечает собственному значению  $\lambda_1 = 2$ . Собственный вектор  $(0, 1, 0, 1)$  отвечает собственному значению  $\lambda_2 = 0$ .

□

**Задача 15.** Доказать, что преобразование  $\mathcal{A}$ , заданное в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет в некотором другом базисе диагональный вид и найти этот вид.

**Решение.** Пусть  $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ . Найдем собственные значения преобразования  $\mathcal{A}$ .

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 6 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ 1 & 8 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(3 - \lambda)(1 - \lambda)$$

Уравнение  $\det(A - \lambda E) = 0$  имеет три корня:

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 3$$

$$\lambda_3 = 4$$

Так как кратность каждого корня равна 1, то базис каждого из пространств собственных векторов, отвечающих этим собственным значениям, состоит ровно из одного вектора. Преобразование  $\mathcal{A}$  в базисе из этих собственных векторов имеет диагональный вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

где по главной диагонали стоят собственные значения преобразования  $\mathcal{A}$ .

**Ответ.**  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

□

## 5 Пространства со скалярным произведением

**Задача 16.** С помощью процесса ортогонализации построить ортогональный базис линейной оболочки следующей системы векторов:

$$\{(1, 2, 2, -1), (1, 1, -5, 3), (3, 2, 8, -7), (2, 3, -3, 2)\}.$$

*Решение.* Обозначим

$$\begin{aligned}a_1 &= (1, 2, 2, -1), \\a_2 &= (1, 1, -5, 3), \\a_3 &= (3, 2, 8, -7), \\a_4 &= (2, 3, -3, 2)\end{aligned}$$

и  $L = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$ .

1. Найдем базис линейной оболочки  $L$ . Так как система векторов  $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  полна в  $L$ , то для этого достаточно выделить в ней максимальную линейно независимую подсистему. Составим линейную комбинацию:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4.$$

Подставив числовые значения векторов  $a_1, a_2, a_3, a_4$  и приравняв эту линейную комбинацию к нулевому вектору пространства  $\mathbb{R}^4$ , получим:

$$\begin{aligned}(\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4, 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4, 2\alpha_1 - 5\alpha_2 + 8\alpha_3 - 3\alpha_4, \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - 7\alpha_3 + 2\alpha_4) = (0, 0, 0, 0)\end{aligned}$$

Это равенство эквивалентно следующей системе линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 - 5\alpha_2 + 8\alpha_3 - 3\alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - 7\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Будем решать эту систему методом Гаусса, приводя ее матрицу коэффициентов к ступенчатому виду:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 8 & -3 \\ -1 & 3 & -7 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(2) - 2(1) \\ (3) - 2(1) \\ (4) + (1)}} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & -7 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-1(2) \\ (3) + 7(2) \\ \frac{1}{4}(4) \\ (4) - (2)}} \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{5}(4) \\ (3) - 30(4)}} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Неизвестная  $\alpha_4$  является свободной, следовательно вектор  $a_4$  можно представить в виде линейной комбинации векторов  $a_1, a_2, a_3$ . Тогда базис линейной оболочки  $L$  состоит из векторов  $a_1, a_2, a_3$ .

2. Построим ортогональный базис  $\{e_1, e_2, e_3\}$  линейной оболочки  $L$  с помощью процесса ортогонализации Грамма-Шмидта.

$$e_1 = a_1 = (1, 2, 2, -1)$$

Вектор  $e_2$  будем искать в виде

$$e_2 = a_2 + \alpha e_1.$$

Так как векторы  $e_1$  и  $e_2$  должны быть ортогональны, то коэффициент  $\alpha$  найдем из условия

$$(e_2, e_1) = 0.$$

Пользуясь свойством линейности скалярного произведения по второму аргументу из этого равенства находим, что

$$\alpha = -\frac{(a_2, e_1)}{(e_1, e_1)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда, } e_2 &= a_2 - e_1 \cdot \frac{(a_2, e_1)}{(e_1, e_1)} = (1, 1, -5, 3) - (1, 2, 2, -1) \cdot \frac{1+2-10-3}{1+4+4+1} = \\ &= (1, 1, -5, 3) + (1, 2, 2, -1) = (2, 3, -3, 2) \end{aligned}$$

Аналогичным образом будем искать вектор  $e_3$  в виде

$$e_3 = a_3 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 a_2.$$

Коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  найдем из условий

$$(e_3, e_1) = 0, (e_3, e_2) = 0.$$

Также пользуясь свойством линейности скалярного произведения по второму аргументу находим, что

$$\alpha_1 = -\frac{(a_3, e_1)}{(e_1, e_1)}, \alpha_2 = -\frac{(a_3, e_2)}{(e_2, e_2)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда, } e_3 &= a_3 - e_1 \cdot \frac{(a_3, e_1)}{(e_1, e_1)} - e_2 \cdot \frac{(a_3, e_2)}{(e_2, e_2)} = \\ &= (3, 2, 8, -7) - (1, 2, 2, -1) \cdot \frac{3+4+16+7}{1+4+4+1} - (2, 3, -3, 2) \cdot \frac{6+6-24-14}{4+9+9+4} = \\ &= (3, 2, 8, 7) - 3(1, 2, 2, -1) + (2, 3, -3, 2) = (2, -1, -1, -2) \end{aligned}$$

**Ответ.** Ортогональный базис:  $\{(1, 2, 2, -1), (2, 3, -3, 2), (2, -1, -1, -2)\}$

□

**Задача 17.** Найти базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов:

$$\{(1, 2, 2, -1), (1, 1, -5, 3), (3, 2, 8, -7), (2, 3, -3, 2)\}.$$

*Решение.* Пусть

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 2, 2, -1) \\ a_2 &= (1, 1, -5, 3) \\ a_3 &= (3, 2, 8, -7) \\ a_4 &= (2, 3, -3, 2) \end{aligned}$$

1. Найдем базис линейной оболочки  $L = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$ . Система векторов  $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  полна в  $L$ , следовательно для нахождения базиса достаточно выделить в ней максимальную линейно независимую подсистему векторов. Составим линейную комбинацию

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4.$$

Подставив числовые значения векторов  $a_1, a_2, a_3, a_4$  и приравняв эту линейную комбинацию к нулевому вектору пространства  $\mathbb{R}^4$ , получим:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4, 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4, 2\alpha_1 - 5\alpha_2 + 8\alpha_3 - 3\alpha_4, \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - 7\alpha_3 + 2\alpha_4) = (0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Это равенство эквивалентно следующей системе линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 - 5\alpha_2 + 8\alpha_3 - 3\alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - 7\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Будем решать эту систему методом Гаусса, приводя ее матрицу коэффициентов к ступенчатому виду:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 8 & -3 \\ -1 & 3 & -7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2) - 2(1) \\ (3) - 2(1) \\ (4) + (1)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & -7 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-1 \cdot (2) \\ \frac{1}{4} \cdot (4)}} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(3) + 7(2) \\ (4) - (2)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(4) + \frac{5}{26}(3) \\ \frac{1}{26} \cdot (3)}} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Неизвестная  $\alpha_4$  является свободной, следовательно вектор  $a_4$  выражается в виде линейной комбинации векторов  $a_1, a_2, a_3$ . Тогда базис линейной оболочки  $L$  состоит из векторов  $a_1, a_2, a_3$ .

2. Найдем базис ортогонального дополнения  $L^\perp$ . Пусть  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Напомним, что  $x \in L^\perp$  тогда и только тогда, когда для произвольного  $y \in L$  выполняется соотношение

$$(x, y) = 0.$$

В частности:

$$(x, a_1) = (x, a_2) = (x, a_3) = 0.$$

Более того, в силу линейности скалярного произведения, справедливость последней цепочки равенств является достаточной для того, чтобы вектор  $x$  принадлежал ортогональному дополнению  $L^\perp$ .

$$\begin{aligned}(x, a_1) &= x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 \\(x, a_2) &= x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 \\(x, a_3) &= 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 7x_4\end{aligned}$$

Тогда условие  $x \in L^\perp$  эквивалентно тому, что координаты вектора  $x$  удовлетворяют следующей системе линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

Найдем фундаментальную систему решений этой системы линейных однородных уравнений.

$$\begin{aligned}& \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \\ 3 & 2 & 8 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2) - (1) \\ (3) - 3(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -7 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-1 \cdot (2) \\ -\frac{1}{2} \cdot (3)}} \\& \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3) - 2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & -15 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1) - 2(2) \\ -\frac{1}{15} \cdot (3)}} \\& \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -12 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1) + 12(3) \\ (2) - 7(3)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Фундаментальная система решения состоит из одного вектора  $(3, -2, 2, 3)$ . Это и является базисом ортогонального дополнения  $L^\perp$ .

**Ответ.**  $(3, -2, 2, 3)$ .

□

## 6 Квадратичные и билинейные формы

**Задача 18.** На векторном пространстве  $\mathbb{C}$  над полем  $\mathbb{R}$  задано отображение

$$f(u, v) = \operatorname{Re}(u\bar{v}).$$

Проверить, будет ли данное отображение билинейной формой. В случае положительного ответа найти матрицу данной билинейной формы в базисе  $\{1, i\}$ .

*Решение.* Напомним, что отображение  $f(u, v)$  является билинейной формой тогда и только тогда, когда для любых  $u, v, w \in \mathbb{C}$  и любого  $\alpha \in \mathbb{R}$  выполняются условия:

1.  $f(u + v, w) = f(u, w) + f(v, w)$ ;
2.  $f(\alpha u, v) = \alpha f(u, v)$ ;
3.  $f(u, v + w) = f(u, v) + f(u, w)$ ;
4.  $f(u, \alpha v) = \alpha f(u, v)$ .

1. Проверим, удовлетворяет ли функция  $f$  этим четырем условиям. Пусть

$$\begin{aligned}u &= u_1 + iu_2 \\v &= v_1 + iv_2 \\w &= w_1 + iw_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1.1. \quad f(u + v, w) &= f(u_1 + v_1 + i(u_2 + v_2), w_1 + iw_2) = \\&= \operatorname{Re}((u_1 + v_1 + i(u_2 + v_2)) \cdot (w_1 - iw_2)) = (u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2.\end{aligned}$$

Аналогичным образом  $f(v, w) = v_1w_1 + v_2w_2$ . Тогда:

$$f(u, w) + f(v, w) = u_1w_1 + u_2w_2 + v_1w_1 + v_2w_2 = (u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 = f(u + v, w).$$

$$\begin{aligned}1.2. \quad f(\alpha u, v) &= f(\alpha u_1 + i\alpha u_2, v_1 + iv_2) = \operatorname{Re}((\alpha u_1 + i\alpha u_2) \cdot (v_1 - iv_2)) = \\&= \alpha u_1v_1 + \alpha u_2v_2 = \alpha(u_1v_1 + u_2v_2) = \alpha \operatorname{Re}((u_1 + iu_2) \cdot (v_1 - iv_2)) = \alpha f(u, v).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1.3. \quad f(u, v + w) &= f(u_1 + iu_2, v_1 + w_1 + i(v_2 + w_2)) = \\&= \operatorname{Re}((u_1 + iu_2) \cdot (v_1 + w_1 - i(v_2 + w_2))) = u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2).\end{aligned}$$

Как и раньше,  $f(u, v) = u_1v_1 + u_2v_2$  и  $f(u, w) = u_1w_1 + u_2w_2$ . Тогда

$$f(u, v) + f(u, w) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_1w_1 + u_2w_2 = u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) = f(u, v + w).$$

$$\begin{aligned}1.4. \quad f(u, \alpha v) &= f(u_1 + iu_2, \alpha v_1 + i\alpha v_2) = \operatorname{Re}((u_1 + iu_2) \cdot (\alpha v_1 - i\alpha v_2)) = \\&= \alpha u_1v_1 + \alpha u_2v_2 = \alpha(u_1v_1 + u_2v_2) = \alpha f(u, v).\end{aligned}$$

Таким образом, отображение  $f$  действительно является билинейной формой.

2. Найдем матрицу билинейной формы  $f$  в базисе  $\{1, i\}$ . Напомним, что элементы матрицы  $(a_{ij})_{2 \times 2}$  имеют вид:

$$a_{ij} = f(e_i, e_j),$$

где  $e_i, e_j$  — базисные векторы пространства  $\mathbb{C}$ . В нашем случае  $e_1 = 1, e_2 = i$ . Тогда:

$$\begin{aligned}a_{11} &= f(1, 1) = \operatorname{Re}(1 \cdot \bar{1}) = 1 \\a_{12} &= f(1, i) = \operatorname{Re}(1 \cdot \bar{i}) = 0 \\a_{21} &= f(i, 1) = \operatorname{Re}(i \cdot \bar{1}) = 0 \\a_{22} &= \operatorname{Re}(i \cdot \bar{i}) = 1\end{aligned}$$

Таким образом матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

является матрице билинейной формы  $f$  в базисе  $\{1, i\}$ .

**Ответ.** *Отображение  $f$  является билинейной формой. Матрица этой формы в базисе  $\{1, i\}$  имеет вид  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .*

□

**Задача 19.** Пусть билинейная форма  $f$  задана в базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти значение билинейной формы  $f(x, y)$  на векторах  $x = (1, 0, 3), y = (-1, 2, -4)$ , заданных своими координатами в базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$ .

$$\text{Решение. } f(x, y) = (1, 0, 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = (1 \quad 11 \quad 16) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -43.$$

**Ответ.**  $-43$ .

□

**Задача 20.** Пусть билинейная форма  $f$  задана в базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу билинейной формы  $f$  в базисе  $\{e_1 - e_2, e_1 + e_3, e_1 + e_2 + e_3\}$ .

*Решение.* Пусть  $F'$  — матрица билинейной формы  $f$  в базисе  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , где

$$\begin{aligned}e'_1 &= e_1 - e_2 \\e'_2 &= e_1 + e_3 \\e'_3 &= e_1 + e_2 + e_3\end{aligned}$$

Матрицы  $F$  и  $F'$  связаны следующим соотношением:

$$F' = T_{e \rightarrow e'}^t \cdot F \cdot T_{e \rightarrow e'},$$

где  $T_{e \rightarrow e'}$  — матрица перехода от базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$  к базису  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ . Так как векторы  $e'_1, e'_2, e'_3$  заданы в виде линейных комбинаций векторов  $e_1, e_2, e_3$ , то матрица перехода  $T_{e \rightarrow e'}$  составлена из коэффициентов этих линейных комбинаций, записанных в столбцы:

$$T_{e \rightarrow e'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{aligned} F' &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 7 & 10 \\ -3 & 8 & 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Ответ.**  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 7 & 10 \\ -3 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

□

**Задача 21.** Выяснить, при каких значениях параметра  $\lambda$  квадратичная форма

$$5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

является положительно определенной.

*Решение.* Составим матрицу данной квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

По критерию Сильвестра квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда главные миноры матрицы этой формы положительны.

$$\Delta_1 = \det \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix} = 5 > 0$$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 5 - 4 = 1 > 0$$

$$\Delta_3 = \det \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} = 5\lambda + 2 + 2 - 1 - 5 - 4\lambda = \lambda - 2$$

Неравенство  $\Delta_3 > 0$  справедливо при  $\lambda > 2$ , следовательно данная квадратичная форма положительно определена при  $\lambda > 2$ .

**Ответ.** *Квадратичная форма положительно определена при  $\lambda > 2$ .*

□