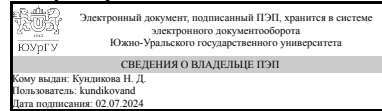


# ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ:  
Заведующий выпускающей  
кафедрой



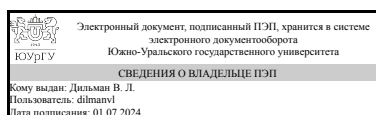
Н. Д. Кундикова

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

**дисциплины** 1.Ф.П0.12 Функциональный анализ  
**для направления** 03.03.01 Прикладные математика и физика  
**уровень** Бакалавриат  
**профиль подготовки** Прикладные математика и физика  
**форма обучения** очная  
**кафедра-разработчик** Математический анализ и методика преподавания математики

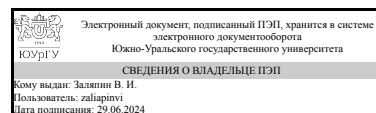
Рабочая программа составлена в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 03.03.01 Прикладные математика и физика, утверждённым приказом Минобрнауки от 07.08.2020 № 890

Зав.кафедрой разработчика,  
д.физ.-мат.н., доц.



В. Л. Дильман

Разработчик программы,  
к.физ.-мат.н., доц., профессор



В. И. Заляпин

## 1. Цели и задачи дисциплины

Сформировать у слушателя понимание обобщенного подхода к основным понятиям и методам элементарных глав математического анализа и смежных областей алгебры и геометрии. С единой точки зрения изучить различные проблемы из специальных аналитических дисциплин (анализа, алгебры, дифференциальных уравнений, вариационного исчисления и т.п.) и установить связи между далекими на первый взгляд математическими теориями и тем самым способствовать более глубокому пониманию основных математических конструкций.

## Краткое содержание дисциплины

Метрические пространства; открытые и замкнутые множества; компактные множества в метрических пространствах; полнота и пополнение; теорема о стягивающих шарах; принцип сжимающих отображений; топологические пространства; примеры. Множества, алгебра множеств; построение меры Лебега на прямой; общее понятие аддитивной меры; лебеговское продолжение меры; измеримые функции их свойства; определение интеграла Лебега; класс суммируемых функций; предельный переход под знаком интеграла; связь интеграла Лебега с интегралом Римана; интеграл Стильтьеса; теорема Радона – Никодима; прямое произведение мер и теорема Фубини; пространства  $L_1$ ,  $L_p$  ( $p > 1$ ); неравенства Гельдера и Минковского. Определение линейного нормированного пространства; примеры норм; банаховы пространства; сопряженное пространство, его полнота; теорема Хана – Банаха о продолжении линейного функционала; общий вид линейных функционалов в некоторых банаховых пространствах; линейные операторы; норма оператора; сопряженный оператор; принцип равномерной ограниченности; обратный оператор; спектр и резольвента; теорема Банаха об обратном операторе; компактные операторы; компактность интегральных операторов; понятие об индексе; теорема Фредгольма; примеры использования теоремы Фредгольма (задача Штурма – Лиувилля, теория потенциала, индекс дифференциального оператора). Скалярное произведение; неравенство Коши – Буняковского – Шварца; ортогональные системы; неравенство Бесселя; базисы и гильбертова размерность; теорема об изоморфизме, ортогональное дополнение; общий вид линейного функционала; самосопряженные (эрмитовы) и унитарные операторы; ортопроекторы; спектр эрмитова и унитарного оператора; теорема Гильберта о компактных эрмитовых операторах; функциональное исчисление; приведение оператора к виду умножения на функцию; спектральная теорема; неограниченные самосопряженные операторы; примеры

## 2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

Планируемые результаты освоения ОП ВО (компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине
УК-2 Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	Знает: основные концепции функционального анализа: пространство, метрика, норма, топология, скалярное произведение, обобщенная функция, оператор, функционал и т.п.; знать, как представляются конкретные физические процессы и явления в терминах

	<p>функционального анализа.          Умеет: анализировать линейные отображения; вычислять интегралы Лебега; находить экстремумы функционалов; использовать аппарат функционального анализа для анализа электродинамических явлений и процессов и процессов квантовой механики.          Имеет практический опыт: использования понятия обобщенной функции (в частности - дельта - функции Дирака) для анализа физических процессов и явлений; спектрального анализа при исследовании операторов квантовой механики.</p>
--	---

### 3. Место дисциплины в структуре ОП ВО

Перечень предшествующих дисциплин, видов работ учебного плана	Перечень последующих дисциплин, видов работ
Дополнительные главы высшей математики, Теория групп, Введение в специальность, Физика поверхности	Физика конденсированного состояния, Теория волн

Требования к «входным» знаниям, умениям, навыкам студента, необходимым при освоении данной дисциплины и приобретенным в результате освоения предшествующих дисциплин:

Дисциплина	Требования
Физика поверхности	Знает: основные свойства поверхностей и физических явлений на них; методы изучения поверхностей; атомную и электронную структуру; адсорбцию. Умеет: применять полученные знания по физике поверхностей для анализа систем, процессов и методов. Имеет практический опыт: анализа систем и поверхностей; анализа атомной и электронной структуры.
Дополнительные главы высшей математики	Знает: функцию от матрицы и способах её вычисления; применение функций от матриц в теории дифференциальных уравнений; примеры компактных и некомпактных операторов; элементы теории Рисса-Шаудера и ее применение в теории интегральных уравнений. Умеет: находить функции от матриц и применять их при решении систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами; решать спектральные задачи для интегрального оператора с вырожденным ядром. Имеет практический опыт: нахождения собственных значений и собственных функций для некоторых компактных интегральных операторов.
Введение в специальность	Знает: дифракционную теорию оптических инструментов; теорию люминесценции;

	устройство лазеров на красителях; принципы работы оптических приборов; области и границы применения различных методов исследования и их возможные погрешности. Умеет: критически оценивать применимость различных методик и методов при проведении исследований, используя для этого теоретические знания. Имеет практический опыт:
Теория групп	Знает: определение линейного представления группы, эквивалентных представлений; определение унитарных представлений; теорему об эквивалентности линейного представления конечной группы унитарному представлению; определение инвариантного подпространства представления, приводимого и неприводимого представления. Умеет: находить стандартное представление группы $S_n$ и ее подгрупп; находить регулярное представление групп малых порядков; находить группу характеров циклических групп; находить группу характеров конечных абелевых групп; находить число неприводимых представлений конечных групп малых порядков и степени этих представлений. Имеет практический опыт: нахождения неприводимых представлений и характеров для групп малых порядков.

#### 4. Объём и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 з.е., 72 ч., 52,25 ч. контактной работы

Вид учебной работы	Всего часов	Распределение по семестрам в часах
		Номер семестра
		6
Общая трудоёмкость дисциплины	72	72
<i>Аудиторные занятия:</i>	48	48
Лекции (Л)	32	32
Практические занятия, семинары и (или) другие виды аудиторных занятий (ПЗ)	16	16
Лабораторные работы (ЛР)	0	0
<i>Самостоятельная работа (СРС)</i>	19,75	19,75
Выполнение текущих заданий. Подготовка к зачету	10	10
Работа с учебником	9,75	9,75
Консультации и промежуточная аттестация	4,25	4,25
Вид контроля (зачет, диф.зачет, экзамен)	-	зачет

#### 5. Содержание дисциплины

№	Наименование разделов дисциплины	Объем аудиторных занятий по видам в часах
---	----------------------------------	---

раздела		Всего	Л	ПЗ	ЛР
1	Множества	4	2	2	0
2	Пространства и структуры	22	14	8	0
3	Операторы и функционалы	12	8	4	0
4	Операторы в гильбертовых пространствах	4	2	2	0
5	Введение в спектральную теорию	6	6	0	0

## 5.1. Лекции

№ лекции	№ раздела	Наименование или краткое содержание лекционного занятия	Кол-во часов
1	1	Элементы теории множеств. Взаимно однозначное соответствие. Мощность. Счетные и континуальные множества. Символика. Кванторы. Пространства. Функциональные пространства.	2
2-3	2	Структуры. Метрические пространства. Расстояния. Окрестности. Открытые и замкнутые множества. Сходимость. Компактность. Критерии компактности. Полнота. Сепарабельность. Пополнение метрических пространств. Примеры. Принцип сжимающих отображений.	4
4-5	2	Линейные векторные пространства. Линейная зависимость. Размерность. Понятие о базисе. Базис в конечномерных и бесконечномерных пространствах. Базис Гамеля. Базис Шаудера. Линейные нормированные пространства. Неравенства Гельдера и Минковского. Банаховы пространства. Примеры.	4
6-7	2	Скалярное произведение в линейных пространствах. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Евклидовы, унитарные и гильбертовы пространства. Примеры. Ортонормированные базисы в гильбертовых пространствах. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Процедура ортогонализации. Ряды Фурье. Неравенство Бесселя. Полнота и замкнутость ортогональных систем. Равенство Парсеваля.	4
8	2	Базис Шаудера в сепарабельных гильбертовых пространствах. Наилучшие приближения в гильбертовых пространствах.	2
9-10	3	Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность. Норма линейного оператора. Пространство линейных операторов. Точечная и равномерная сходимость последовательности линейных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза.	4
11-12	3	Обратные операторы. Условия обратимости и непрерывной обратимости линейного оператора. Теорема Банаха об обратном операторе. Линейные функционалы. Теорема Хана-Банаха.	4
13	4	Общий вид линейных непрерывных функционалов в некоторых конкретных нормированных пространствах. Сопряженные пространства и сопряженные операторы. Ограниченность сопряженного оператора.	2
14-16	5	Введение в спектральную теорию. Конечномерные операторы. Вполне непрерывные операторы. Спектр и резольвента. Введение в спектральную теорию. Самосопряженные операторы. Спектральные свойства самосопряженных операторов. Спектральная теорема и её следствия.	6

## 5.2. Практические занятия, семинары

№ занятия	№ раздела	Наименование или краткое содержание практического занятия, семинара	Кол-во часов
1	1	Элементы теории множеств. Мощность числовых множеств.	2

2-3	2	Метрика. Свойства метрики. Примеры метрик. Полнота метрического пространства. Теорема о пополнении. Сепарабельность. Теорема Вейерштрасса	4
4-5	2	Линейные пространства. Базисы. Банаховы пространства. Пространство непрерывных функций на отрезке. Теорема Вейерштрасса.	4
6-7	3	Ортогонализация. Ряды Фурье в гильбертовых пространствах. Скалярное произведение. Свойства. Примеры.	4
8	4	Ряды Фурье в гильбертовых пространствах. Наилучшие приближения в гильбертовых пространствах.	2

### 5.3. Лабораторные работы

Не предусмотрены

### 5.4. Самостоятельная работа студента

Выполнение СРС			
Подвид СРС	Список литературы (с указанием разделов, глав, страниц) / ссылка на ресурс	Семестр	Кол-во часов
Выполнение текущих заданий. Подготовка к зачету	ПУМД, осн. лит 2, гл.2, (с.77-82), гл.8 (с.406-489), ЭУМД, осн.лит.1, с.63-95, ЭУМД, осн. лит 2, гл.2, (с.78-91), гл.4 (с.191-205), ЭУМД, доп. лит.,3,гл.1,с. 9-68, ПУМД, осн. лит 4, гл. 4, (с.206-234), ПУМД, осн. лит 5, гл.3 (с.114-169), гл.6 (с.245-288) ПУМД, доп.. лит 3.,гл.1, с. 9-45, гл.2, с.46-64, гл.5 с.102-113, ЭУМД,, доп.. лит 4.,гл.1, с. 9-45, гл.2, с.46-64, гл.5 с.102-113	6	10
Работа с учебником	ПУМД, осн. лит 4, гл.2 (с. 44-68), гл. 3 (с.114-120, 131-134), ПУМД, осн. лит 2, гл.1,2 (с.11-76), ЭУМД, осн. лит. 1, с.16-48, ЭУМД, осн. лит 2, гл.2 (с. 44-68), гл. 3 (с.114-120, 131-134), ЭУМД, доп. лит.,3,гл.1,с. 9-68, ПУМД, осн. лит 4, гл.2, (с.78-91), гл.4 (с. 191-205), ПУМД, осн. лит 2, гл.2, (с.77-82), гл.8 (с.406-489), ЭУМД, осн.лит.1, с.63-95, ЭУМД, осн. лит 2, гл.2, (с.78-91), гл.4 (с. 191-205), ЭУМД, доп. лит.,3,гл.1,с. 9-68, ПУМД, осн. лит 4, гл. 4, (с.206-234), ПУМД, осн. лит 5, гл.3 (с.114-169), гл.6 (с.245-288), ПУМД, осн. лит 2, гл. 7 (с.305-390), ЭУМД, осн.лит.1, с.98-127, ЭУМД, осн. лит 2, гл.2, (с.78-91), гл. 4, (с.206-234),	6	9,75

### 6. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации

Контроль качества освоения образовательной программы осуществляется в соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе оценивания результатов учебной деятельности обучающихся.

## 6.1. Контрольные мероприятия (КМ)

№ КМ	Се-мestr	Вид контроля	Название контрольного мероприятия	Вес	Макс. балл	Порядок начисления баллов	Учи-тыва-ется в ПА
1	6	Текущий контроль	Множества	2	10	Задание содержит 10 задач. Задача решена верно - 1 балл, задача не решена или решена неверно - 0 баллов.	зачет
2	6	Текущий контроль	Пространства и структуры	3	30	Задание состоит из трех частей, каждая из которых содержит 10 задач. Задача решена верно - 1 балл, задача не решена или решена неверно - 0 баллов.	зачет
3	6	Текущий контроль	Операторы и функционалы	2	10	Задание содержит 10 задач. Задача решена верно - 1 балл, задача не решена или решена неверно - 0 баллов.	зачет
4	6	Текущий контроль	Операторы в гильбертовых пространствах	3	10	Задание содержит 10 задач. Задача решена верно - 1 балл, задача не решена или решена неверно - 0 баллов.	зачет
6	6	Проме-жуточная аттестация	Все разделы	-	50	Студент должен решить 5 задач по своему выбору. Задача не решена - 0 баллов; наличествует идея решения задачи, но она технически не реализована - 3 балла; идея решения задачи верна, но реализована с ошибками - 6 баллов; задача решена (м.б. и с незначительными погрешностями технического характера) - 10 баллов.	зачет

## 6.2. Процедура проведения, критерии оценивания

Вид промежуточной аттестации	Процедура проведения	Критерии оценивания
зачет	Зачетная процедура представляет собой письменную контрольную работу, на выполнение которой студенту отводится 2 ак. часа. Оценка "зачтено" выставляется студенту, рейтинг которого не менее 60%. В противном случае выставляется оценка "незачтено". Предусмотрена возможность выставления зачета без прохождения зачетной процедуры .	В соответствии с пп. 2.5, 2.6 Положения

## 6.3. Паспорт фонда оценочных средств

Компетенции	Результаты обучения	№ КМ				
		1	2	3	4	6
УК-2	Знает: основные концепции функционального анализа: пространство, метрика, норма, топология, скалярное произведение, обобщенная функция, оператор, функционал и т.п.; знать, как представляются конкретные физические процессы и явления в терминах функционального анализа.	+	+	+		+
УК-2	Умеет: анализировать линейные отображения; вычислять интегралы Лебега; находить экстремумы функционалов; использовать аппарат функционального анализа для анализа электродинамических явлений и процессов и процессов квантовой механики.	+	+	+	+	+

УК-2	Имеет практический опыт: использования понятия обобщенной функции (в частности - дельта - функции Дирака) для анализа физических процессов и явлений; спектрального анализа при исследовании операторов квантовой механики.							
------	---	--	--	--	--	--	--	--

Типовые контрольные задания по каждому мероприятию находятся в приложениях.

## 7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### Печатная учебно-методическая документация

#### а) основная литература:

1. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа Учеб. для мат. спец. ун-тов. - 6-е изд., испр. - М.: Наука, 1989. - 623 с. ил.
2. Рудин, У. Функциональный анализ У. Рудин; Пер. с англ. В. Я. Лина; Под ред. Е. А. Горина. - 2-е изд., испр. и доп. - СПб. и др.: Лань, 2005. - 443 с.

#### б) дополнительная литература:

1. Треногин, В. А. Задачи и упражнения по функциональному анализу Текст В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева. - М.: Наука, 1984. - 256 с.
2. Треногин, В. А. Функциональный анализ Текст Учеб. пособие для вузов по спец. "Прикл. математика" В. А. Треногин. - М.: Наука, 1980. - 495 с. ил.

#### в) отечественные и зарубежные журналы по дисциплине, имеющиеся в библиотеке:

1. Функциональный анализ и его приложения,  
<http://www.mathnet.ru/faa>

#### г) методические указания для студентов по освоению дисциплины:

1. В.А. Штраус, А.Ю. Эвнин, И.Я. Гольдшейд. Решение задач по функциональному анализу. Челябинск, ЧПИ, 1989
2. М.Л. Катков, Л.В. Матвеева, Л.Д. Менихес. Сборник задач по функциональному анализу. Изд. ЮУрГУ, Челябинск, 1999
3. Бескачко В.П., Заляпин В.И. Математические основы квантовой механики

#### из них: учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студента:

1. В.А. Штраус, А.Ю. Эвнин, И.Я. Гольдшейд. Решение задач по функциональному анализу. Челябинск, ЧПИ, 1989
2. М.Л. Катков, Л.В. Матвеева, Л.Д. Менихес. Сборник задач по функциональному анализу. Изд. ЮУрГУ, Челябинск, 1999
3. Бескачко В.П., Заляпин В.И. Математические основы квантовой механики

### Электронная учебно-методическая документация

№	Вид	Наименование	Библиографическое описание
---	-----	--------------	----------------------------



	литературы	ресурса в электронной форме	
1	Основная литература	Электронно-библиотечная система издательства Лань	Люстерник, Л.А. Краткий курс функционального анализа. [Электронный ресурс] / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2009. — 272 с. <a href="http://e.lanbook.com/book/2110">http://e.lanbook.com/book/2110</a>
2	Основная литература	Электронно-библиотечная система издательства Лань	Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа. [Электронный ресурс] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — Электрон. дан. — М. : Физматлит, 2009. — 572 с. — Режим доступа: <a href="http://e.lanbook.com/book/2206">http://e.lanbook.com/book/2206</a>
3	Дополнительная литература	Электронно-библиотечная система издательства Лань	Треногин, В.А. Функциональный анализ. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — М. : Физматлит, 2007. — 488 с. — Режим доступа: <a href="http://e.lanbook.com/book/59471">http://e.lanbook.com/book/59471</a>
4	Дополнительная литература	Электронно-библиотечная система издательства Лань	Треногин, В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу. [Электронный ресурс] / В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. — Электрон. дан. — М. : Физматлит, 2005. — 240 с. — Режим доступа: <a href="http://e.lanbook.com/book/2342">http://e.lanbook.com/book/2342</a>

Перечень используемого программного обеспечения:

Нет

Перечень используемых профессиональных баз данных и информационных справочных систем:

Нет

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Вид занятий	№ ауд.	Основное оборудование, стенды, макеты, компьютерная техника, предустановленное программное обеспечение, используемое для различных видов занятий
Лекции	506 (16)	Компьютер с медиапроектором